TI 1 - Ergänzung 1

A1 Ziel dieser Aufgabe ist es, das logische Schließen zu üben. Deswegen vermeiden wir jede Art von Logik-Kalkülen oder Wahrheitstafeln.

1. Struktur: Aus $V \vee F$ und $\neg V$ folgt F.

   Richtig! Wäre er nicht im Fitnessstudio, dann wäre er wegen der 2. Bedingung weder in der Vorlesung noch im Fitnessstudio. Das verletzt Bedingung 1.

2. Struktur: Aus $\neg L \Rightarrow \neg B$ und B folgt L.

   Richtig! Hätte sie nicht gelernt, dann hätte sie wegen der 1. Bedingung nicht bestanden. Das verletzt Bedingung 2.

3. Struktur: Aus $\neg B \Rightarrow \neg N$ und B folgt N.

   Falsch! Er könnte auch keinen Nachtisch bekommen und trotzdem wären beide Bedingungen erfüllt.

4. Struktur: Aus $L \Rightarrow S$, $\neg S \Rightarrow \neg G$ und L folgt G.

   Falsch! Sie könnte auch lernen, Schokolade essen und trotzdem unglücklich sein.

$\boxed{A2}$

1. $A(x) \Rightarrow B(x)$, aber $B(x) \not\Rightarrow A(x)$ (Gegenbeispiel: $x=9$).

2. $A(x) \not\Rightarrow B(x)$ (Gegenbeispiel: $x=-4$).

   und $B(x) \not\Rightarrow A(x)$ (Gegenbeispiel: $x=-5$).

3. $B(x) \Rightarrow A(x)$, aber $A(x) \not\Rightarrow B(x)$ (Gegenbeispiel: $x=-5$).

   Info: $x^2 \geq 25 \iff |x| \geq 5 \iff x \leq -5 \lor x \geq 5$.

4. $A(x) \iff B(x)$.

   Info: Diese Regel gilt immer: $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.

5. $A(x) \Rightarrow B(x)$, aber $B(x) \not\Rightarrow A(x)$ (Gegenbeispiel: $x=0$).

   Info: $|x-5| \leq 4 \iff -4 \leq x-5 \leq 4 \iff 1 \leq x \leq 9$.

$\boxed{\text{A3}}$

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y.$

2. $\forall x \in \mathbb{Z} : \Big(x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \underbrace{\big(x \text{ positiv} \lor x \text{ null}\big)}_{\substack{\text{alternativ: } x > 0 \;\lor\; x = 0 \\ \text{oder: } x \geq 0}} \Big).$

3. $\forall x \in \mathbb{N} : \Big(\big(\exists y \in \mathbb{N} : x \neq y \land y > 0 \land y \text{ teilt } x \big) \Rightarrow \neg (x \text{ prim} \big).$

4. $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y, z \in \mathbb{N} : x = y^2 + z^2.$

5. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}.$

Wie beweist man Aussagen?

Aussage	Kurzform	übliche Vorgehensweise
Wenn A, dann B.	$A \Rightarrow B$	Nimm A an. Zeige danach B.
A genau dann, wenn B.	$A \Leftrightarrow B$	Zeige $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$.
A und B.	$A \wedge B$	Zeige A und B.
A oder B.	$A \vee B$	Zeige $\neg A \Rightarrow B$ oder $\neg B \Rightarrow A$.
Für alle x gilt A.	$\forall x: A$	Führe beliebiges x ein. Zeige danach A.
Es gibt ein x für das A gilt.	$\exists x: A$	Führe konkretes x ein. Zeige danach A.

<u>Info:</u> $\forall x \in M: A$ ist eine alternative Schreibweise für $\forall x: (x \in M \Rightarrow A)$ und $\exists x \in M: A$ eine für $\exists x: (x \in M \wedge A)$.

$\boxed{\text{A4}}$ „zu zeigen"

z.z.: $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}: \big((x \text{ teilt } y \wedge y \text{ teilt } z) \Rightarrow x \text{ teilt } z\big)$.

Beweis:

$\forall x,y,z$

Seien $x,y,z \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{beliebig}}$!

Mit diesen zwei Informationen müssen wir zeigen, dass x z teilt, also $\exists k \in \mathbb{Z}: z = k \cdot x$.

Angenommen, $\boxed{x \text{ teilt } y}$ und $\boxed{y \text{ teilt } z}$.

„daraus folgt"

$\Rightarrow$ Es gibt ein $k' \in \mathbb{Z}$ mit $y = k'x$ und es gibt ein $k'' \in \mathbb{Z}$ mit $z = k''y$.

einsetzen liefert $z = k''y = k''k'x$

$\exists k$

$\boxed{\text{Wähle}}$ $k = k' \cdot k''$.

$\Rightarrow$ $k \in \mathbb{Z}$ (da k' und k'' aus $\mathbb{Z}$) und $z = k''y = k''k'x = kx$.

$\Rightarrow$ Es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = k \cdot x$.

$\Rightarrow$ x teilt z. $\square$

q.e.d.

Wie widerlegt man Aussagen?

Man beweist die Negation $\neg A$ der Aussage A.

Aussage (in Kurzform)	Negation (in Kurzform)
$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$\forall x: A$	$\exists x: \neg A$
$\exists x: A$	$\forall x: \neg A$

(bzw. $\forall k \in T : k \in A_n$)

$\forall k : k \in T \Rightarrow k \in A_n$

$\boxed{AS}$ Struktur:

$$\forall T \subseteq \mathbb{N},\ |T| < \infty : \exists n \in \mathbb{N} : \overbrace{T \subseteq A_n}.$$

1. Die Aussage stimmt.

Beweis: Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ mit $|T| < \infty$ $\overset{\forall T}{\boxed{\text{beliebig}}}$.

$\Rightarrow$ Weil T endlich ist, hat es ein Maximum.

$\exists n$ $\boxed{\text{Wähle}}$ $n = \max T$.

Sei nun k $\overset{\forall k}{\boxed{\text{beliebig}}}$ mit $k \in T$.

$\Rightarrow k \leq n$ (wegen $n = \max T$).

$\Rightarrow k \in A_n$. $\square$

2. Die Aussage stimmt nicht. Aussage negieren!

<u>z.z.</u> $\exists T \subseteq \mathbb{N}, |T| < \infty : \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{T \not\subseteq A_n}$

$\exists k : k \in T \wedge k \notin A_n$

(bzw. $\exists k \in T : k \notin A_n$)

$\exists T$

<u>Beweis</u>: $\boxed{\text{Wähle}}$ $T = \{0,1\}$.

$\Longrightarrow$ $T \subseteq \mathbb{N}$ und $|T| = 2 < \infty$.

$\forall n$

Sei $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\text{beliebig}}$.

$\exists k$ $\boxed{\text{Wähle}}$ $k = 1$, falls $n = 0$, und $k = 0$, falls $n \geq 1$.

Fall 1: $n = 0$.

$\Longrightarrow$ $k = 1$ und $A_n = \{0\}$.

Fall 2: $n \geq 1$.

$\Longrightarrow$ $k = 0$ und $A_n = \{1\}$.

$\Longrightarrow$ $k \in T$, aber $k \notin A_n$. $\square$

3. Die Aussage stimmt.

Beweis:

$\forall T$

Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ mit $|T| < \infty$ $\boxed{\text{beliebig}}$.

$\Longrightarrow$ Weil T endlich ist, existiert das Produkt aller Zahlen in T.

Produktzeichen. Bsp.: $\prod_{i \in \{1,2,3\}} i^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 36.$

$\exists n$

$\boxed{\text{Wähle}}$ $n = \prod_{i \in T} i$.

$\forall k$

Sei nun k $\boxed{\text{beliebig}}$ mit $k \in T$.

$\Longrightarrow$ k kommt als Faktor in n vor.

$\Longrightarrow$ k teilt n.

$\Longrightarrow$ $k \in A_n$. $\square$

$\boxed{\text{A6}}$

Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x, y, z \in \mathbb{Z} : \big((x \equiv y \bmod n \wedge y \equiv z \bmod n)$

$$\Rightarrow \underbrace{x \equiv z \bmod n}_{\exists k \in \mathbb{Z}:\, z = x + kn} \big).$$

Beweis:

$\forall n, x, y, z$

Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{beliebig}}$.

Angenommen, es gelten $x \equiv y \bmod n$ und $y \equiv z \bmod n$.

$\Rightarrow$ Es gibt ein $k' \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + k'n$ und es gibt ein $k'' \in \mathbb{Z}$ mit $z = y + k''n$.

$\Rightarrow$ Es gibt $k', k'' \in \mathbb{Z}$ mit $z = y + k''n = x + k'n + k''n$
$= x + (k' + k'')n$.

$\exists k$

Wähle $\boxed{k = k' + k''}$.

$\Rightarrow$ $z = x + kn$ und $k \in \mathbb{Z}$ (da $k', k'' \in \mathbb{Z}$).

$\Rightarrow$ Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = x + kn$.

$\Rightarrow$ $x \equiv z \bmod n$

$\square$