TI 1 - Ergänzung 2

A1

1. $AC \cap BC = \{a, ba, aba, abba\} \cap \{aa, aba, bba, bbba\} = \{aba\}$.

kein Wort u kann die Bedingung $u \in \emptyset$ erfüllen, d.h.:

2. $(A \cap B)C = \emptyset C = \emptyset$.

$\{uv \mid u \in \emptyset \wedge v \in C\} = \{uv \mid \text{falsch}\} = \emptyset$.

3. $B^3 = BB^2 = BBB = \{aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb\}$.

4. $C^* = \{w \in \Sigma^* \mid$ in w kommen keine zwei bs nebeneinander vor und w endet nicht mit $b\}$.

5. $\emptyset^+ = \emptyset \cup \emptyset^2 \cup \emptyset^3 \cup \ldots = \emptyset$.

6. $\emptyset^* = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \cup \emptyset^2 \cup \emptyset^3 \cup \ldots = \{\varepsilon\}$.

7. $A^2 = AA = \{\varepsilon, ab, ab, abab\} = \{\varepsilon, ab, abab\}$.

8. $ABC = \{aa, aba, bba, bbba, abaa, ababa, abbba, abbbba\}$.

9. $CBA = \{aa, aaab, abb, abbab, baa, baaab, babb, babbab\}$.

10. $(B \cap C)^+ = \{a\}^+ = \{a^k \mid k \geq 1\}$.

11. $A^* = \{\varepsilon, ab\}^* = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \ldots\} = \{(ab)^k \mid k \geq 0\}$.

12. $(B \cup C)^2 = \{a, bb, a, ba\}^2 = \{a, bb, ba\}^2 = \{a, bb, ba\}\{a, bb, ba\}$

$= \{aa, abb, aba, bba, bbbb, bbba, baa, babb, baba\}$.

$\boxed{A2}$ Nicht vergessen: $X \subseteq Y$ heißt: $\underbrace{\forall x: x \in X \Rightarrow x \in Y}_{\text{kürzer: } \forall x \in X: x \in Y}$.

1.

<u>z.z.</u> $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Longrightarrow AC \subseteq BD$

<u>Beweis</u>:

Angenommen, $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$. ← Ab hier müssen wir $AC \subseteq BD$ zeigen.

Sei x $\boxed{\text{beliebig}}$ ($\forall x$) mit $x \in AC$.

$\Longrightarrow$ $x = uv$ für $u \in A$ und $v \in C$

$\Longrightarrow$ $x = uv$ für $u \in B$ und $v \in D$ — Annahmen $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$ benutzt.

$\Longrightarrow$ $x \in BD$. $\square$

2. <u>z.z.</u>: $(A\cap B)C \subseteq AC \cap BC$, d.h.:

$$\forall x: x \in (A\cap B)C \Rightarrow x \in AC \cap BC$$

bzw.

$$\forall x \in (A\cap B)C : x \in AC \cap BC.$$

<u>Beweis</u>:

$\forall x$

Sei x $\boxed{\text{beliebig}}$ mit $x \in (A\cap B)C$.

$\Rightarrow$ $x = uv$ mit $u \in A\cap B$ und $v \in C$.

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $x = uv$ mit $u \in A$, $u \in B$ und $v \in C$.

$\Rightarrow$ $x \in AC$ und $x \in BC$.

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $x \in AC \cap BC$. □

(*) Erinnerung:

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}.$$

„Schnitt" „und"

Eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ wird häufig gezeigt, indem man die zwei Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ getrennt voneinander zeigt.

3. z.B. $\varepsilon \in A \Leftrightarrow \underbrace{A^+ = A^*}_{A^+ \subseteq A^* \text{ und } A^* \subseteq A^+}$

<u>Beweis von „$\Rightarrow$":</u>

Angenommen, $\varepsilon \in A$.

Wir zeigen nur $A^* \subseteq A^+$, denn $A^+ \subseteq A^*$ ist trivial.

Sei x beliebig mit $x \in A^*$.

$\Longrightarrow$ $x \in A^n$ für ein $n \geq 0$

Fall 1: $n = 0$.

$\Longrightarrow$ $x = \varepsilon$.

$\Longrightarrow$ $x \in A$.

$\Longrightarrow$ $x \in A^+$.

Fall 2: $n \geq 1$.

$\Longrightarrow$ $x \in A^+$.

Beweis von „$\Leftarrow$":

Angenommen, $A^+ = A^*$.

$\Longrightarrow \varepsilon \in A^+$, da $\varepsilon \in A^0 \subseteq A^*$.

$\Longrightarrow \varepsilon \in A^n$ für ein $n \geq 1$.

$\Longrightarrow \varepsilon = w_1 w_2 \cdots w_n$ für $w_1, w_2, \ldots, w_n \in A$.

$\Longrightarrow w_1 = w_2 = \ldots = w_n = \varepsilon$.

$\Longrightarrow \varepsilon \in A$. $\square$

$\boxed{A3}$

1. <u>Vermutung</u>: $L^n = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 5n\}$.

<u>Beweis durch vollständige Induktion</u>:

„Induktionsanfang"

- I.A.: $A^0 = \{\varepsilon\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 0\}$. ✓

„Induktionsschritt"

- I.S.: Sei $n \geq 1$ beliebig. Angenommen, es gilt

$$L^{n-1} = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 5(n-1)\}. \qquad \text{(I.V.)}$$

„Induktions-voraus-setzung"

z.z.: $\underbrace{L^n = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 5n\}}$. (I.B.) ← „Induktions-behauptung"

d.h. $\forall w \in \Sigma^*: w \in L^n \Leftrightarrow |w| \leq 5n$

Beweis: Sei $w \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
w \in L^n &\Leftrightarrow w \in LL^{n-1} \\
&\Leftrightarrow w = uv \text{ für } u \in L \text{ und } \underline{v \in L^{n-1}} \\
&\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} w = uv \text{ für } u, v \in \Sigma^* \text{ mit} \\
&\qquad |u| \leq 5 \text{ und } \underline{|v| \leq 5(n-1)}. \\
&\Leftrightarrow |w| \leq 5n.
\end{aligned}$$

„Äquivalent nach I.V."

$\square$

2. Vermutung: $|L_n| = \frac{1}{2}(n^2 - n)$.

Beweis durch vollständige Induktion:

- I.A.: $|L_0| = 0 = \frac{1}{2}(0^2 - 0)$. ✓

kein Wort kann 2 bs enthalten und Länge 0 haben!

- I.S.: Sei $n \geq 1$ beliebig. Angenommen, es gilt

$$|L_{n-1}| = \frac{1}{2}\left((n-1)^2 - (n-1)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2). \qquad \text{(I.V.)}$$

z.z.: $|L_n| = \frac{1}{2}(n^2 - n)$. (I.B.)

Beweis: Es gilt

$$L_n = \underbrace{\{wa \mid w \in L_{n-1}\}}_{=:A_n} \cup \underbrace{\{wb \mid |w| = n-1 \wedge |w|_b = 1\}}_{=:B_n}$$

mit $|A_n| = |L_{n-1}|$ und $|B_n| = n-1$.

$$\Rightarrow |L_n| = |A_n \cup B_n| = |A_n| + |B_n| = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) + n - 1$$
$$= \frac{1}{2}(n^2 - n). \qquad \square$$

$\boxed{A4}$ Die Lösungen sind nicht eindeutig. Es werden mehrere mögliche Lösungen präsentiert.

1. • $V = \{S,T\}$ und $P = \{S \to TbbT \mid Tbb \mid bbT \mid bb,$
$T \to aT \mid bT \mid a \mid b\}$.

• $V = \{S,T\}$ und $P = \{S \to T,$
$T \to aT \mid bT \mid Ta \mid Tb \mid bb\}$.

$V = \{S\}$ und $P = \{S \to aS \mid bS \mid Sa \mid Sb \mid bb\}$ verletzt die ε-Sonderregel, d.h. G wäre nicht vom Typ 2.

2. • $V = \{S,T\}$ und $P = \{S \to T,$
$T \to aTb \mid Tb \mid b\}$.

• $V = \{S,T,U\}$ und $P = \{S \to TU \mid U,$
$T \to aTb \mid ab,$
$U \to Ub \mid b\}$.

3. Aus Aufgabe 6 der Ergänzung 1 wissen wir:

$$|w|_a \equiv 0 \mod 2 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : 0 = |w|_a + 2k$$
$$\iff |w|_a \text{ ist gerade}.$$

Idee: Stelle ε-Sonderregel in $S \to \varepsilon \mid SaSaS \mid bS$ wieder her!

- $V = \{S, T\}$ und $P = \{ S \to T \mid \varepsilon,$

$$
\begin{aligned}
T \to\ & TaTaT \mid TaTa \mid TaaT \mid aTaT \mid \\
& Taa \mid aTa \mid aaT \mid aa \mid \\
& bT \mid b \}
\end{aligned}
$$

- $V = \{S, T, U\}$ und $P = \{ S \to T \mid \varepsilon,$

$$
\begin{aligned}
& T \to aU \mid bT \mid b, \\
& U \to aT \mid bU \mid a \}.
\end{aligned}
$$

4. - $V = \{S, T\}$ und $P = \{ S \to T \mid \varepsilon,$

$$
T \to aTb \mid bTa \mid ab \mid ba \mid TT \}.
$$

   - $V = \{S, T\}$ und $P = \{ S \to T \mid \varepsilon,$

$$
\begin{aligned}
& TaTbT \mid TaTb \mid TabT \mid aTbT \mid \\
& Tab \mid aTb \mid abT \mid ab \mid \\
& TbTaT \mid TbTa \mid TbaT \mid bTaT \mid \\
& Tba \mid bTa \mid baT \mid ba \}.
\end{aligned}
$$

(Das passiert, wenn man $V = \{S\}$ und $P = \{ S \to SaSbS \mid SbSaS \mid \varepsilon \}$ so gerade biegen möchte, dass die ε-Sonderregel nicht verletzt wird ...)

$\boxed{A5}$

1. $L(G) = \{a^k b^l c^m \mid l = k+m\}$

<u>Typen</u>: 0, aber nicht 1, 2, 3 wegen der ε-Sonderregel.

2. $L(G) = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a\}^*$

<u>Typen</u>: 0, 1 und 2, aber nicht 3.

3. $L(G) = \emptyset$

<u>Typen</u>: 0, 1, 2 und 3.

4. $L(G) = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

<u>Typen</u>: 0 und 1, aber weder 2 noch 3.

$\boxed{\text{A6}}$

Z.z.: $\forall v,w \in \Sigma^* : \big((v \text{ Teilwort von } w \;\wedge\; w \text{ Teilwort von } v) \Rightarrow v = w \big)$.

Beweis:

$\forall v,w$

Seien $v,w \in \Sigma^*$ $\boxed{\text{beliebig}}$.

Angenommen, v ist Teilwort von w und w ist Teilwort von v.

$\Rightarrow$ Es gibt $x,y \in \Sigma^*$ mit $w = xvy$ und
es gibt $x',y' \in \Sigma^*$ mit $v = x'wy'$.

$\Rightarrow$ Es gibt $x,x',y,y' \in \Sigma^*$ mit $w = xvy = xx'wy'y$.

$\Rightarrow$ $x = x' = y = y' = \varepsilon$.

$\Rightarrow$ $w = v$. $\square$