TI 1 - Ergänzung 3

A1

1. $x = ababb$, d.h. $n = |x| = 5$.

   Wie in der Vorlesung, bezeiche ich mit T_i die Menge T nach dem i-ten Durchgang.

   $T_0 = \{S\}$

   $T_1 = T_0 \cup \{\underline{aT}b, \underline{aSba}, \underline{b}\}$

   $T_2 = T_1 \cup \{a\underline{aT}b, \underline{abTb}b, a\underline{a}b, a\underline{b}ba\}$

   $T_3 = T_2 \cup \{aa\underline{aT}b, aa\underline{a}b, ab\underline{a}bb\}$

   Wegen $x \in T_3$ (d.h. $x \in T$ nach dem 3. Durchgang) bricht der Algorithmus ab und gibt 1 (also „ja") zurück.

2. Ja! Jede Produktion hat die Form $A \to w$ für $A \in V$, $w \in \Sigma^*$ (nämlich $S \to b$ und $T \to a$) oder $A \to vBw$ für $A, B \in V$, $v, w \in \Sigma^*$ (die restlichen).

3. Definiere:

$$\mathrm{Abl}_n(X) = X \cup \{ w \in (V \cup \Sigma)^* \mid |w| \leq n,\ \exists y \in X : y \Rightarrow_G w \text{ und}$$
entweder $w = x$ oder $w = w_1 A w_2$
für $A \in V$, w_1 Präfix von x und
w_2 Suffix von x $\}$.

T kann dann maximal

- $|V|$ Satzformen der Länge 1,
- $2 \cdot |V|$ Satzformen der Länge 2,

$\vdots$

- $(n-1) \cdot |V|$ Satzformen der Länge $n-1$ und
- $n \cdot |V| + 1$ Satzformen der Länge n haben.

Insgesamt:

Wolfram Alpha oder „kleiner Gauß"

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot |V| \right) + 1 = |V| \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot |V| \cdot n(n+1) + 1$$

$$= \frac{|V|}{2} \cdot n^2 + \frac{|V|}{2} n + 1$$

4. $T_0 = \{S\}$

$T_1 = T_0 \cup \{\underline{aTb}\}$

$T_2 = T_1 \cup \{ab\underline{Tb}b\}$

$T_3 = T_2 \cup \{ab\underline{a}bb\}$

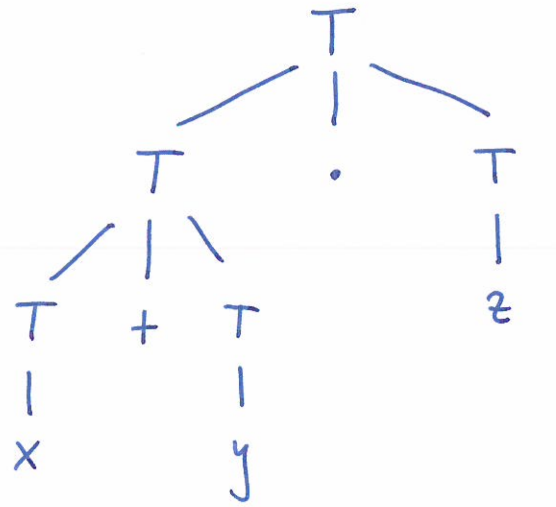
Nur Satzformen w der Form $w = ababb$, $w = w_1 S w_2$ oder $w = w_1 T w_2$ mit w_1 Präfix und w_2 Suffix von x.

<u>Rückgabe:</u> 1 (also „ja"!)

A2

1. $T \Rightarrow_G T \cdot T \Rightarrow_G T + T \cdot T \Rightarrow_G x + T \cdot T$

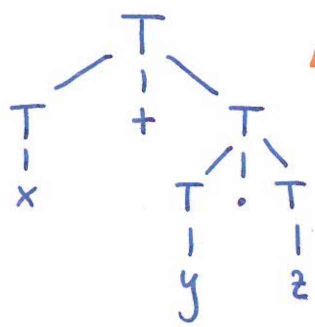
$\Rightarrow_G x + y \cdot T \Rightarrow_G \underline{\underline{x + y \cdot z}}$



„Blattwort"

$\boxed{x + y \cdot z}$

2. Gesucht ist ein Wort mit zwei verschiedenen Syntaxbäumen (bzw. Linksableitungen). Wir geben beispielsweise einen zweiten Syntaxbaum für $x + y \cdot z$ an:



Entspricht der Linksableitung

$T \Rightarrow_G T + T \Rightarrow_G x + T$

$\Rightarrow_G x + T \cdot T \Rightarrow_G x + y \cdot T$

$\Rightarrow_G \underline{\underline{x + y \cdot z}}$

3. $L(G) = \{x,y,z\}\left(\{+,\cdot\}\{x,y,z\}\right)^*$

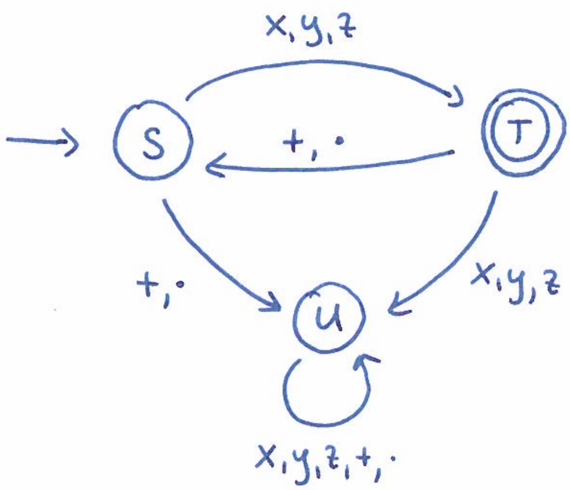
$$= \{u_0 v_1 u_1 v_2 u_2 \dots v_n u_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge u_0, \dots, u_n \in \{x,y,z\} \wedge v_1, \dots, v_n \in \{+,\cdot\}\}$$

bei NEAs ist die Grammatik, die entsteht, nicht immer eindeutig

4. <u>Idee</u>:

Entwerfe <u>DEA</u> für $L(G)$ und überführe ihn in eine reguläre Grammatik. Diese ist immer eindeutig (= nicht mehrdeutig).

<u>DEA</u>:



U ist ein sog. „Fangzustand". Er kann dann in der Grammatik weggelassen werden.

<u>Typ-3-Grammatik</u>:

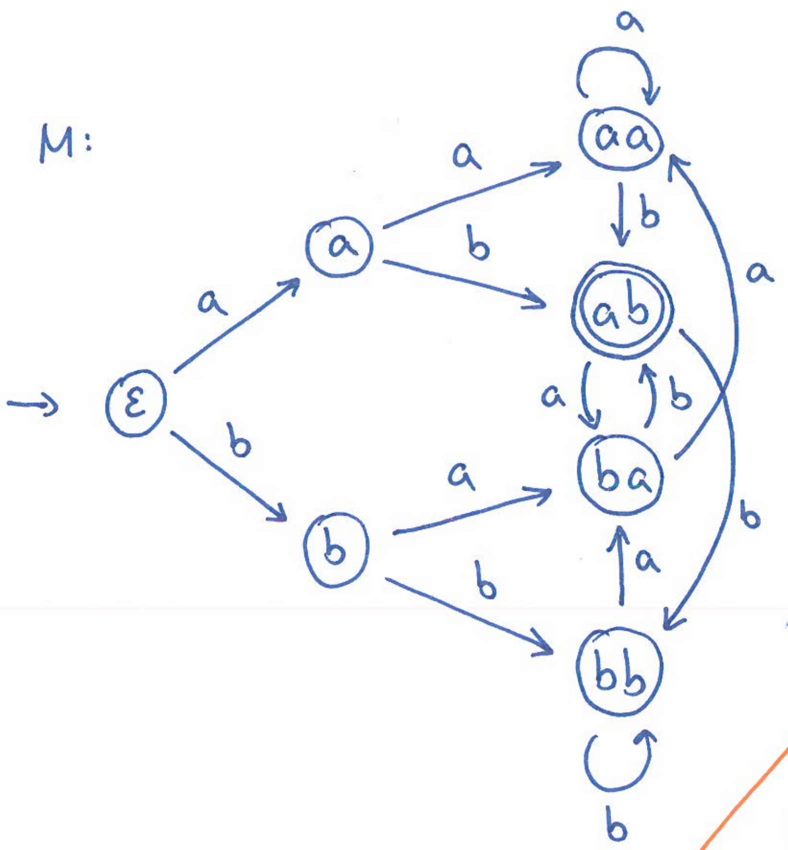
$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}$, $\Sigma = \{x, y, z, +, \cdot\}$ und

$$P = \{S \to xT \mid yT \mid zT \mid x \mid y \mid z,\quad T \to \cdot S \mid +S\}$$

A3

1. Jedes Wort aus L endet mit ab.

M:



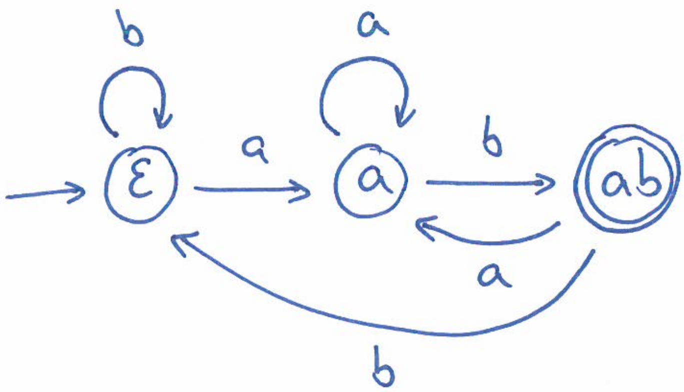
Diese Zeichnung entspricht dem DEA

$M = (\{\varepsilon, a, ab\}, \{a,b\}, \delta, \varepsilon, \{ab\})$ mit:

z	$\delta(z,a)$	$\delta(z,b)$
ε	a	ε
a	a	ab
ab	a	ε

Kompakter:

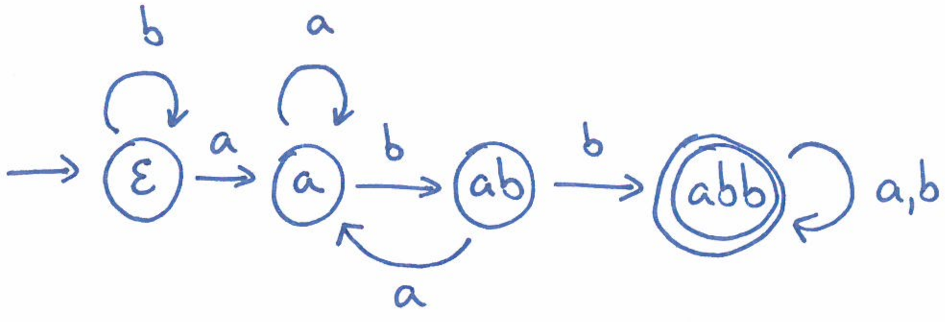
M:



Ab jetzt nur noch Zeichnungen!

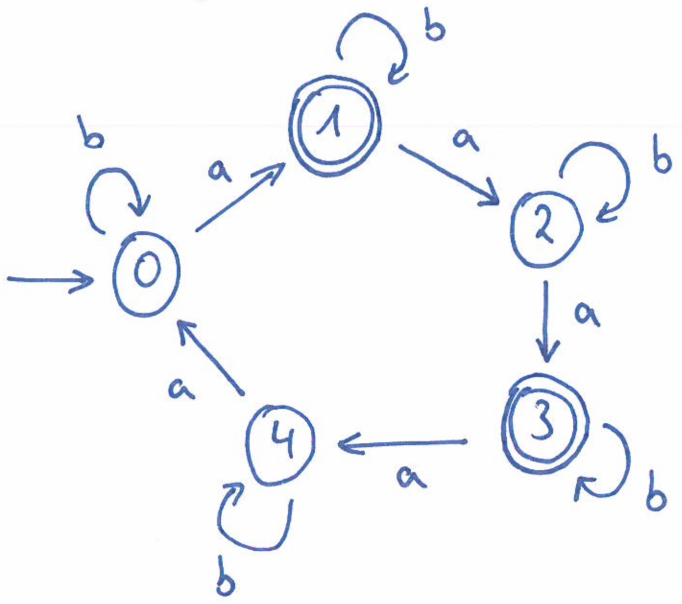
2.

M:



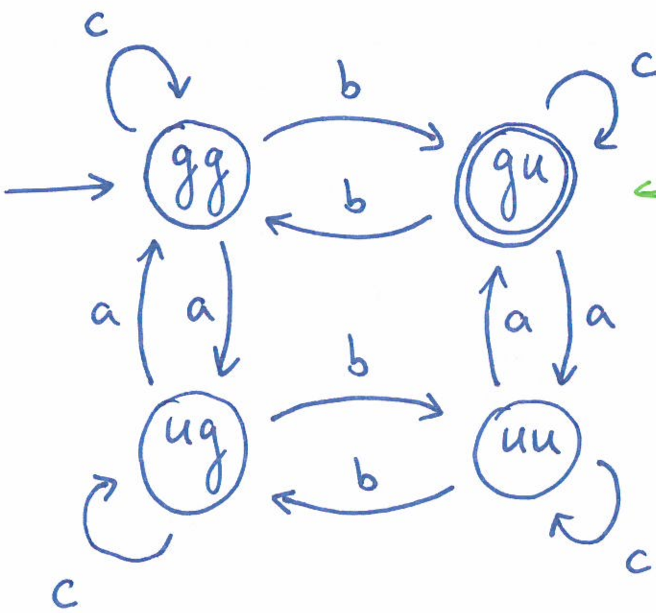
3. 5 soll $|w|_a - 1$ ~~und~~ oder $|w|_a - 3$ teilen, d.h. bei Division von $|w|_a$ durch 5 soll 1 oder 3 als Rest übrig bleiben.

M:



4.

M:

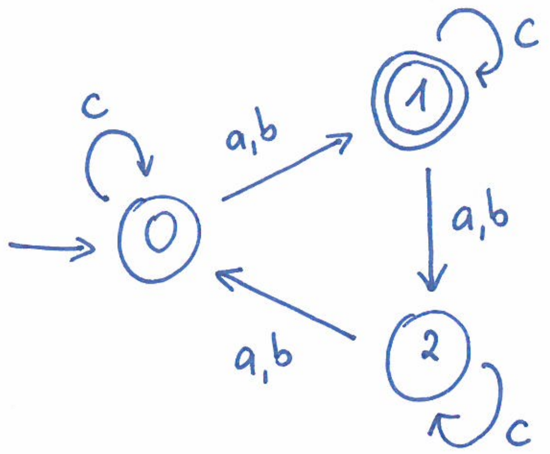


z.B. steht „gu" für „gerade viele as und ungerade viele bs"

5. $|w|_a + |w|_b - 1$ soll durch 3 teilbar sein.

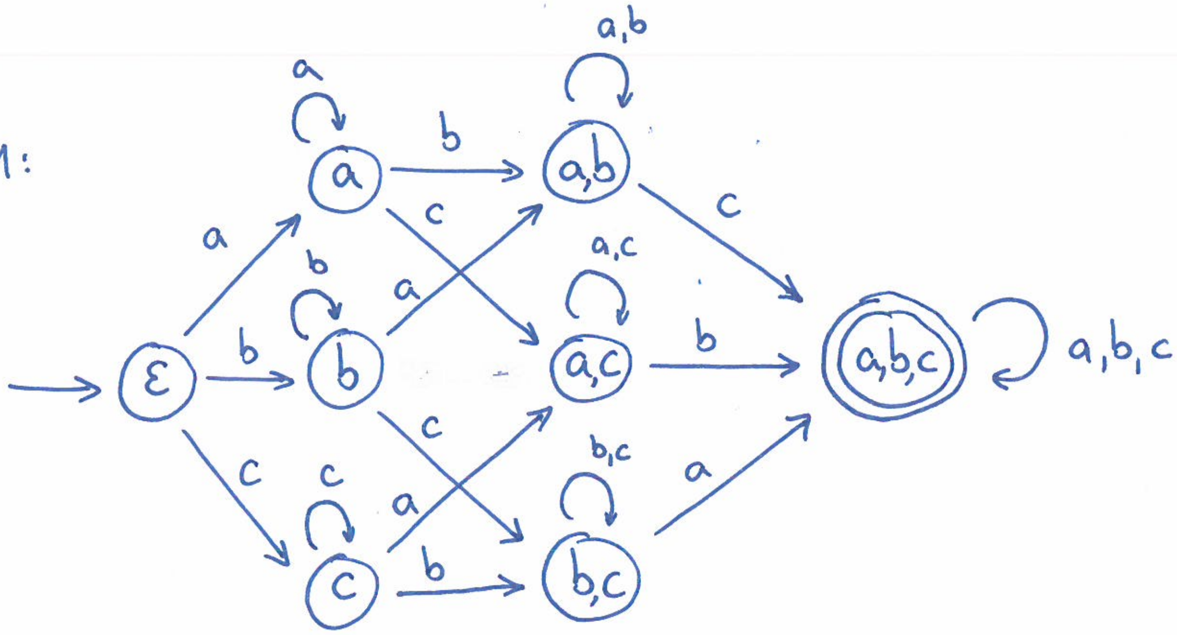
$\Longrightarrow |w|_a + |w|_b \in \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$.

M:

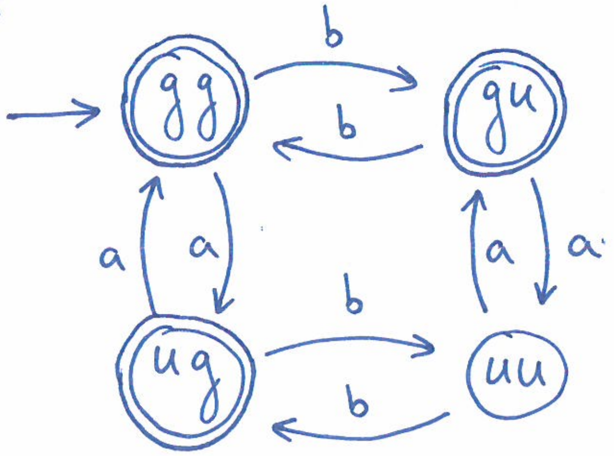


6.

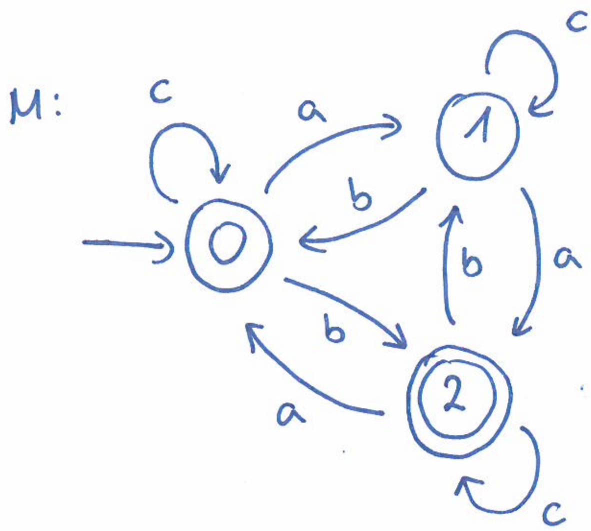
M:



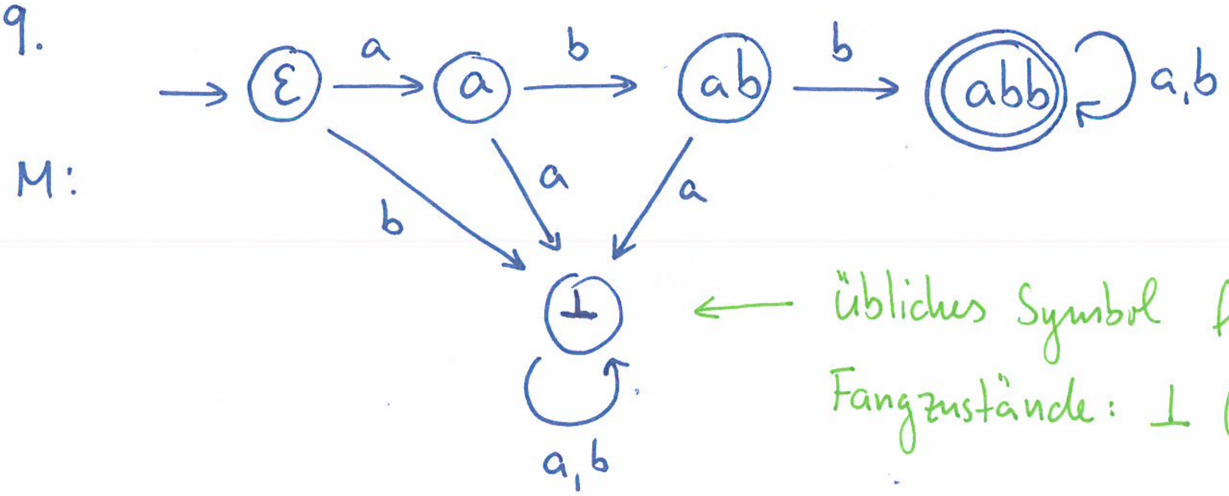
7. M:



8.

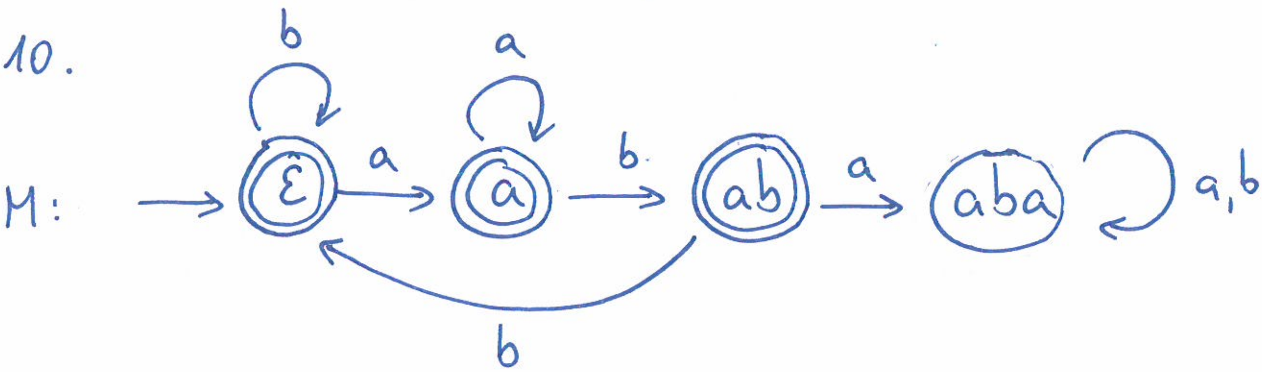


9.

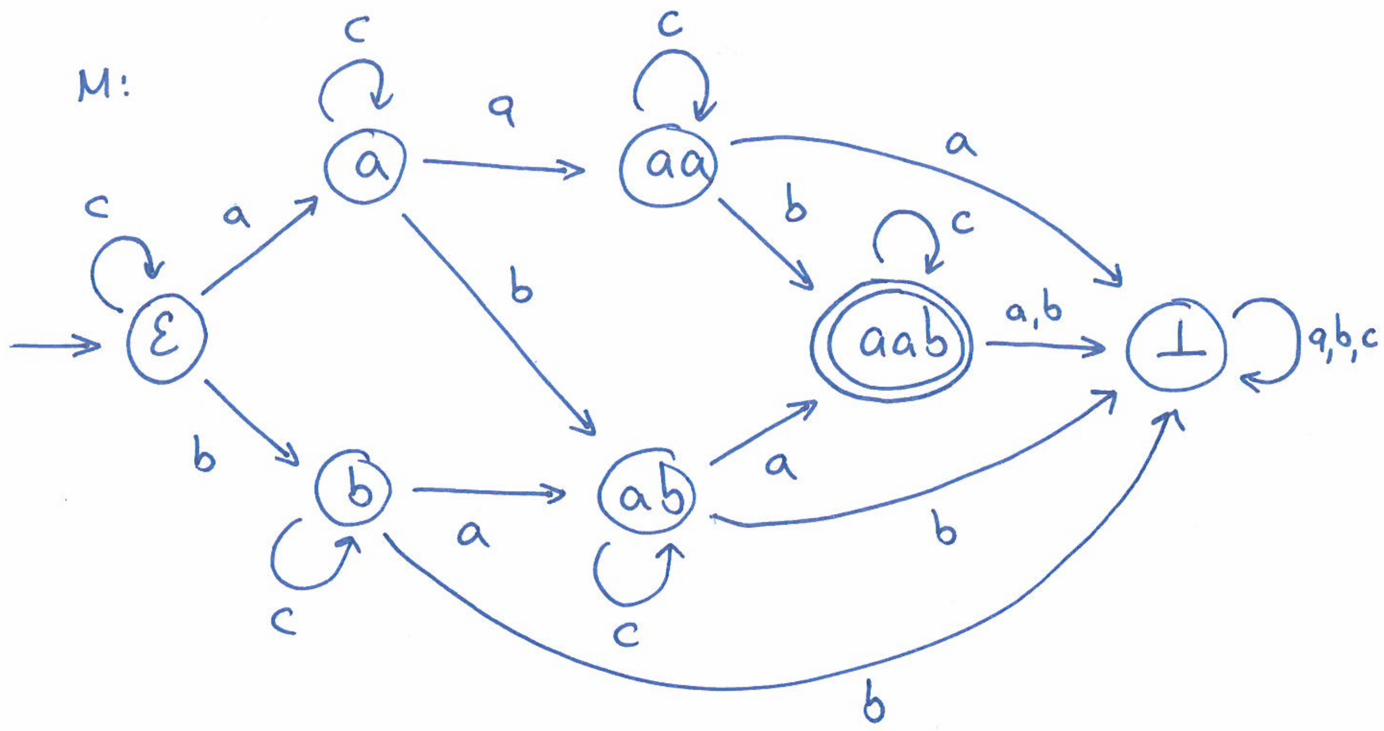


übliches Symbol für Fangzustände: ⊥ („bottom")

10.

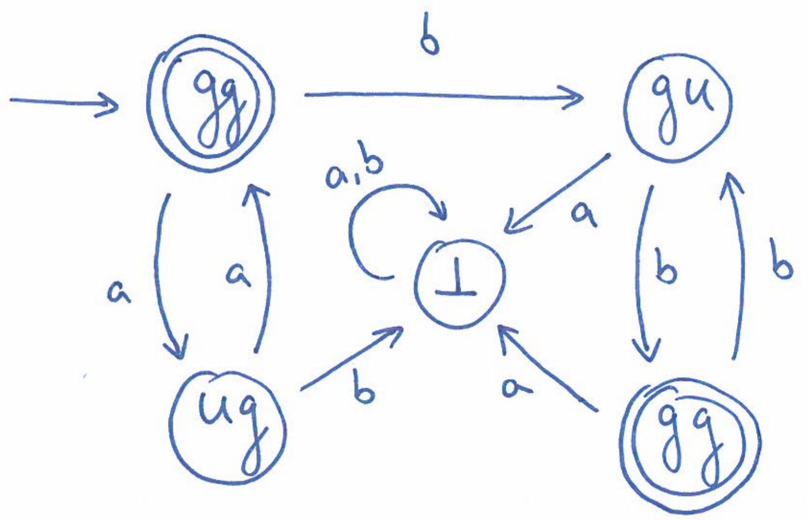


11. M:

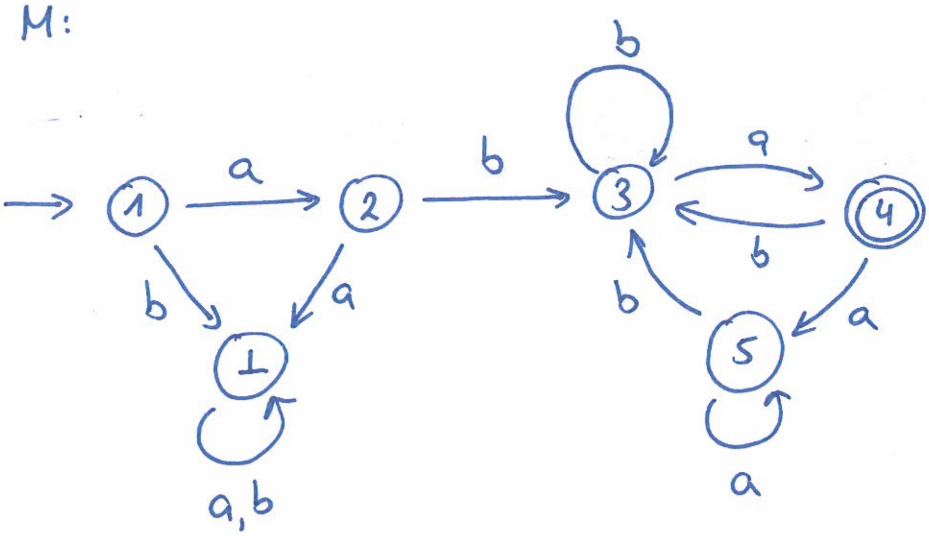


12. m und n müssen beide gerade sein.

M:

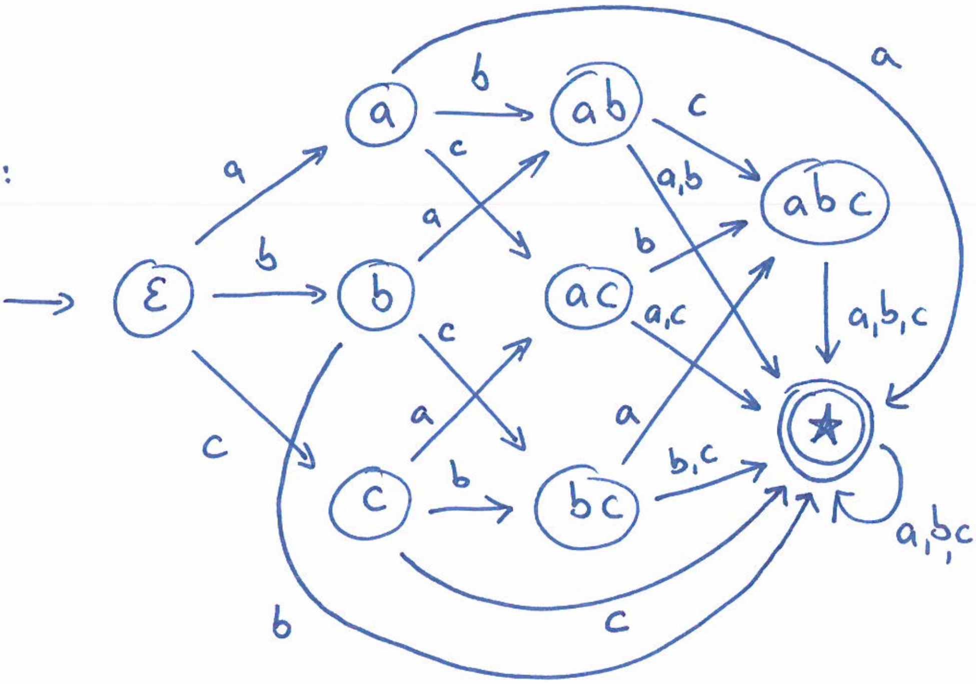


13. M:

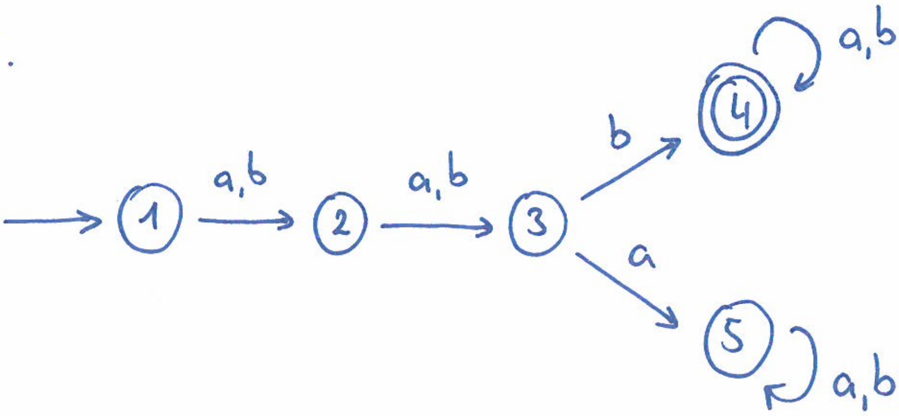

1
2
3
4
5
⊥
a
b
a
b
a
b
a
b
b
a
a
a,b

14.

M:

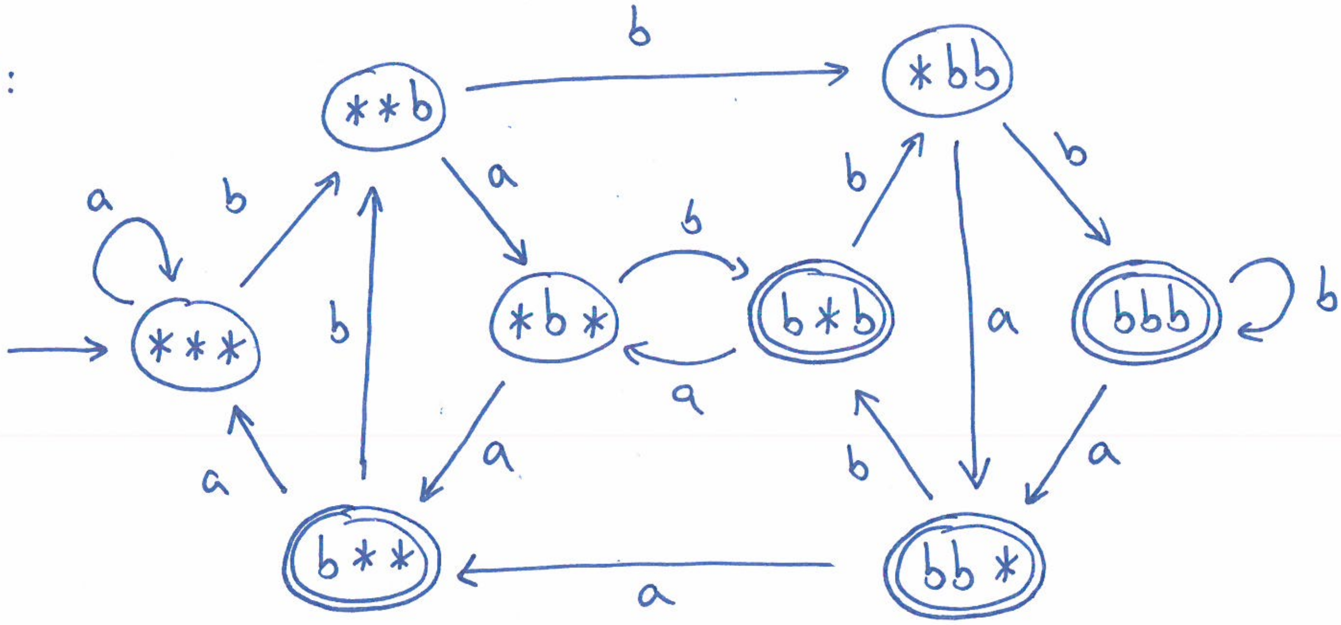

ε
a
b
c
ab
ac
bc
abc
a
b
c
a
b
c
a
c
a
b
c
a,b
b
a,c
a
b,c
a,b,c
a,b,c
a
b
c

15.


1
2
3
4
5
a,b
a,b
b
a
a,b
a,b

16. <u>Idee</u>: In jedem Zustand „merkt" sich der Automat die letzten 3 Zeichen, die er gelesen hat. „*" steht für „a" oder für „noch nichts gelesen".

M:



$\boxed{A4}$

1. $L = \{ab, bb, aab, abb, bab, \underline{abab}, bbab, abbab\}$

   $a \cdot bab = ab \cdot ab = abab.$

2. $L = \{(a,b), (b,b), (a,ab), (ab,b), (b,ab), \underline{(a,bab)}, \underline{(ab,ab)}, (b,bab), (ab,bab)\}$

   In $A \times B$ sind sie unterschiedlich, aber in AB sind sie gleich!

3. $L = \{aa, ab, ba, bb, aab, aba, abb, bab, abab\}$

4. $L = \{b, ab\}$

5. $L = \{a, b, ab, bab\}$

6. $L = \{a\}$

7. $L = \{ab, bb, aab, abb, bab, abab\}$

8. $L = \{aa, ba, aba\}$

9. $L = \{a^m b^3 a^n \mid m,n \in \mathbb{N}\}$

10. $L = \{ab\}$

11. $L = \{abb, bab, bbb\}$

12. $L = \{bb, abb, bab, abab\}$

13. Damit vwv und wv^2w gleich müsse sie (unter anderem) dieselbe Länge haben. Dies ist nur möglich wenn $|w| = 0$, also $w = \varepsilon$. Für $w = \varepsilon$ gilt $vwv = wv^2w$ sogar für alle $v \in \Sigma^*$. Also:

$$L = \{\varepsilon\}.$$

14. $L = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aab, abb, aabb\}$

15. $L = \{(a^0b)^0, (a^1b)^1, (a^2b)^2\} = \{\varepsilon, ab, aabaab\}$

16. $L = \{\underset{\substack{v=b \\ \text{oder } v=ab}}{\varepsilon}, \underset{v=a}{b}, \underset{v=b}{ab}\}$

17. L enthält die Präfixe aller Wörter aus A:

$$L = \{\varepsilon, a, b, ab\}$$

18. L enthält die Teilwörter (Faktoren) aller Wörter aus B:

$$L = \{\varepsilon, a, b, ab, ba, bab\}$$