TI 1 – Ergänzung 4

A1

1. $Z = \{1, \ldots, 5\}$, $\Sigma = \{a,b\}$, $S = \{1,4\}$, $E = \{5\}$ und

z	$\delta(z,a)$	$\delta(z,b)$
1	$\{2\}$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{3\}$
3	$\{3\}$	$\{3,4\}$
4	$\{5\}$	$\emptyset$
5	$\emptyset$	$\emptyset$

2. Schritt für Schritt mit Folie 09.1:

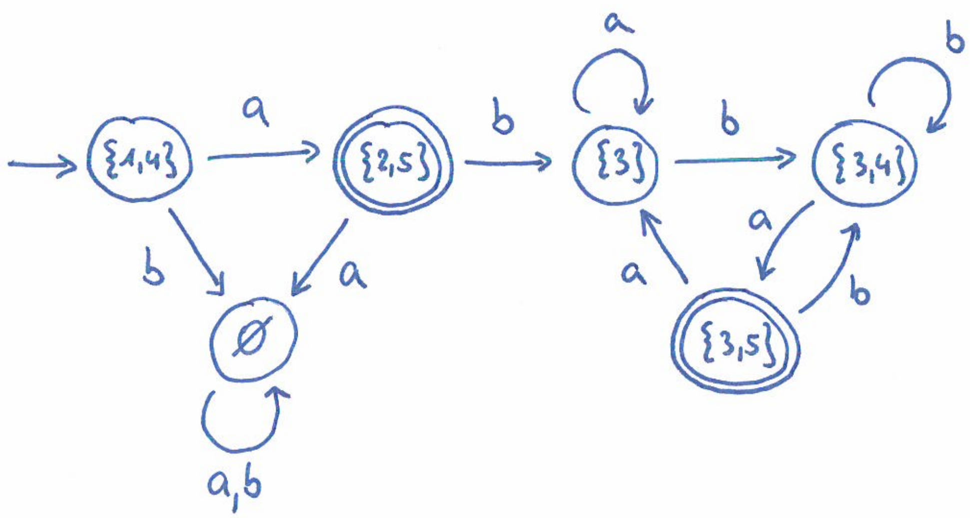
$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(\{1,4\}, ab) &= \hat{\delta}(\delta(1,a), b) \cup \hat{\delta}(\delta(4,a), b) \\
&= \hat{\delta}(\{2\}, b) \cup \hat{\delta}(\{5\}, b) \\
&= \hat{\delta}(\delta(\{2\}, b), \varepsilon) \cup \hat{\delta}(\delta(\{5\}, b), \varepsilon) \\
&= \hat{\delta}(\{3\}, \varepsilon) \cup \hat{\delta}(\emptyset, \varepsilon) \\
&= \{3\} \cup \emptyset \\
&= \{3\}
\end{aligned}$$

3. $T(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid w = a \lor \exists v \in \Sigma^* : w = abvba \}$

4. Als Tabelle:

z	$\delta(z,a)$	$\delta(z,b)$
$\{1,4\}$	$\{2,5\}$	$\emptyset$
$\{2,5\}$	$\emptyset$	$\{3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3,4\}$
$\{3,4\}$	$\{3,5\}$	$\{3,4\}$
$\{3,5\}$	$\{3\}$	$\{3,4\}$

DEA M':



$\boxed{A2}$

<u>Pumping-Lemma</u>: Für $L \subseteq \Sigma^*$ gilt

$$L \text{ regulär} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \forall x \in L, |x| \geq n: \exists u,v,w \in \Sigma^*, x = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n: \forall i \in \mathbb{N}: uv^iw \in L$$

$$L \text{ nicht regulär} \Leftarrow \forall n \in \mathbb{N}: \exists x \in L, |x| \geq n: \forall u,v,w \in \Sigma^*, x = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n: \exists i \in \mathbb{N}: uv^iw \notin L$$

Diese zwei Aussagen sind äquivalent!

<u>Erinnerung</u>:

Die Aussage...	ist äquivalent zu...
$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
$\neg \forall x: A$	$\exists x: \neg A$
$\neg \exists x: A$	$\forall x: \neg A$

$\forall n$

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\text{beliebig}}$.

$\exists x$ $\boxed{\text{Wähle}}$ $x = a^n b^{n+1}$.

$\Rightarrow x \in L$ und $|x| = 2n+1 \geq n$.

$\forall u,v,w$

Seien nun $u,v,w \in \Sigma^*$ $\boxed{\text{beliebig}}$ mit $x = uvw$, $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$.

$\exists i$ $\Rightarrow v = a^k$ für ein k mit $1 \leq k \leq n$.

$\boxed{\text{Wähle}}$ $i = 2$.

$\Rightarrow uv^iw \notin L$, da uv^iw mindestens so viele as wie bs enthält.

Also ist L nicht regulär. $\square$

2. L ist die Menge aller Palindrome über Σ,

z.B. $abccba \in L$ und $abcba \in L$, aber $abcabc \in L$.

$\forall n$

Sei $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\text{beliebig}}$.

$\exists x$

$\boxed{\text{Wähle}}$ $x = a^n b a^n$.

$\Longrightarrow$ $x \in L$ und $|x| = 2n+1 \geq n$.

$\forall u,v,w$

Seien nun $u, v, w \in \Sigma^*$ $\boxed{\text{beliebig}}$ mit $x = uvw$, $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$.

$\Longrightarrow$ $v = a^k$ für ein k mit $1 \leq k \leq n$.

$\exists i$

$\boxed{\text{Wähle}}$ $i = 0$.

$\Longrightarrow$ $uv^iw = uv^0w = uw = a^\ell b a^m$ mit $\ell < m$.

$\Longrightarrow$ uv^iw kann kein Palindrom sein.

$\Longrightarrow$ $uv^iw \notin L$.

Also ist L nicht regulär. $\square$

<u>Wichtig</u>: Das Pumping-Lemma ist eine notwendige Bedingung für reguläre Sprachen („$\Rightarrow$"), aber keine hinreichende („$\Leftarrow$"). Beispielsweise erfüllt die Sprache

$$L = \{a^k b^\ell c^m \mid k = 0 \vee \ell = m\}$$

das Pumping-Lemma ($\exists n \in \mathbb{N}: \forall x \in L, \ldots$), obwohl sie nicht regulär ist.

$\boxed{A3}$ (... a^*... steht ...$(a)^*$... und nicht für $(...a)^*$...! Analog für ...b^*...)

1. $\gamma = (aa)^* b (bb)^*$

2. $\gamma = (a|b)^* ab$

3. $\gamma = (a|b)\big((a|b)(a|b)(a|b)\big)^*$

4. $\gamma = (a|b)(a|b)\,a\,(a|b)^*$

5. $\gamma = b^* a b^* a b^* a b^*$

6. $\gamma = \underbrace{b^*(ab^*ab^*)^*}_{|w|_a \text{ gerade}} \;|\; \underbrace{a^*(ba^*ba^*)^*}_{|w|_b \text{ gerade}}$

7. $\gamma = (a|b)^* a (a|b)^* b (a|b)^* \;|\; (a|b)^* b (a|b)^* a (a|b)^*$

8. $\gamma = (a|b)^* a (a|b)(a|b)$

9. $\gamma = (a|b)^* abb (a|b)^*$

10. $\gamma = ab(a|b)^* ba \;|\; aba$

11. $\gamma = (a|b)^* a (a|b)^* a (a|b)^* \;|\; (a|b)^* b (a|b)^* b (a|b)^*$

12. $\gamma = b^*(a|\varepsilon) b^* (ab^*ab^*ab^*)^*$

$\boxed{A4}$

$c^3 \in \{a\}^*\{c\}^*$ und $ac \in L$

1. Es gilt $b^3c^2, c^3, \varepsilon \in [\![L]\!]$, aber $b^2a, a^2b^3c \notin [\![L]\!]$.

$b^3c^2 \in \{b\}^*\{c\}^*$ und $bc \in L$

$\varepsilon \in \{a\}^*\{b\}^*$ und $ab \in L$

$[\![L]\!] = \{a^k b^\ell c^m \mid k = 0 \lor \ell = 0 \lor m = 0\}$.

2.

(a) Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$x \in [\![AB]\!]$

$\iff x \in \{a_1\}^* \ldots \{a_n\}^*$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ mit $a_1 \ldots a_n \in AB$

$\iff x = uv$ mit $u \in \{a_1\}^* \ldots \{a_\ell\}^*$, $v \in \{a_{\ell+1}\}^* \ldots \{a_{\ell+m}\}^*$ für $\ell, m \in \mathbb{N}$ und $\underbrace{a_1, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}, \ldots, a_{\ell+m}}_{}\overset{\in \Sigma}{}$ mit $a_1 \ldots a_\ell \in A$ und $a_{\ell+1} \ldots a_{\ell+m} \in B$

$\iff x = uv$ mit $u \in [\![A]\!]$ und $v \in [\![B]\!]$

$\iff x \in [\![A]\!][\![B]\!]$ $\square$

<u>Info</u>: Mit Induktion (Induktionsanfang: $[\![\{\varepsilon\}]\!] = \{\varepsilon\}$) kann man mit (a) sehr leicht $[\![A^n]\!] = [\![A]\!]^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen.

(b) Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$x \in [\![A \cup B]\!]$

$\Longleftrightarrow \quad x \in \{a_1\}^* \ldots \{a_n\}^*$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ mit $a_1 \ldots a_n \in A \cup B$

$\Longleftrightarrow \quad x \in \{a_1\}^* \ldots \{a_n\}^*$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ mit $a_1 \ldots a_n \in A$ oder $a_1 \ldots a_n \in B$

$\Longleftrightarrow \quad x \in [\![A]\!]$ oder $x \in [\![B]\!]$

$\Longleftrightarrow \quad x \in [\![A]\!] \cup [\![B]\!]$ $\square$

(c) Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$x \in [\![A^*]\!]$

$\Longleftrightarrow \quad x \in \{a_1\}^* \ldots \{a_n\}^*$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ mit $a_1 \ldots a_n \in A^*$

Erinnerung: $w \in A^* \Leftrightarrow w \in A^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$\Longleftrightarrow \quad x \in \{a_1\}^* \ldots \{a_n\}^*$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ mit $a_1 \ldots a_n \in A^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$\Longleftrightarrow \quad x \in [\![A^k]\!]$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} \quad x \in [\![A]\!]^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$\Longleftrightarrow \quad x \in [\![A]\!]^*$ $\square$

3. $\gamma' = \varepsilon \,|\, a^*b^* \,|\, c^*(a^*b^*)^*$

wichtiger neuer Begriff

4. Beweis durch <u>strukturelle Induktion</u>.

<u>Idee</u>:

IA: Zeige die Aussage für $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \varepsilon$ und $\gamma = a$ für alle $a \in \Sigma$.

IV: Nimm die Aussage für α und β an.

IS: Zeige mithilfe von IV die Aussage für $\gamma = \alpha\beta$, $\gamma = (\alpha \,|\, \beta)$ und $\gamma = (\alpha)^*$.

<u>Beweis</u>:

IA: Falls $\gamma = \emptyset$, wähle $\gamma' = \emptyset$. Dann gilt:

$$[\![L(\gamma)]\!] = [\![\emptyset]\!] = \emptyset = L(\gamma').$$

Falls $\gamma = \varepsilon$, wähle $\gamma' = \varepsilon$. Dann gilt:

$$[\![L(\gamma)]\!] = [\![\{\varepsilon\}]\!] = \{\varepsilon\} = L(\gamma').$$

Falls $\gamma = a$ für ein $a \in \Sigma$, wähle $\gamma' = a^*$. Dann gilt:

$$[\![L(\gamma)]\!] = [\![\{a\}]\!] = \{a\}^* = L(\gamma').$$

IV: Angenommen, es gilt $[\![L(\alpha)]\!] = L(\alpha')$ und $[\![L(\beta)]\!] = L(\beta')$.

IS: Falls $\gamma = \alpha\beta$, wähle $\gamma' = \alpha'\beta'$. Dann gilt:

$$[\![L(\gamma)]\!] = [\![L(\alpha\beta)]\!] = [\![L(\alpha) L(\beta)]\!]$$

$$\overset{2.(a)}{=} [\![L(\alpha)]\!] [\![L(\beta)]\!] \overset{IV}{=} L(\alpha') L(\beta')$$

$$= L(\alpha'\beta') = L(\gamma').$$

Falls $\gamma = (\alpha|\beta)$, wähle $\gamma' = (\alpha'|\beta')$. Dann gilt:

$$[\![L(\gamma)]\!] = [\![L((\alpha|\beta))]\!] = [\![L(\alpha) \cup L(\beta)]\!]$$

$$\overset{2.(b)}{=} [\![L(\alpha)]\!] \cup [\![L(\beta)]\!] \overset{IV}{=} L(\alpha') \cup L(\beta')$$

$$= L((\alpha'|\beta')) = L(\gamma').$$

Falls $\gamma = (\alpha)^*$, wähle $\gamma' = (\alpha')^*$. Dann gilt:

$$[\![L(\gamma)]\!] = [\![L((\alpha)^*)]\!] = [\![L(\alpha)^*]\!]$$

$$\overset{2.(c)}{=} [\![L(\alpha)]\!]^* \overset{IV}{=} L(\alpha')^*$$

$$= L((\alpha')^*) = L(\gamma').$$

□

<u>Beispiel</u>: Mit dieser Definition von γ' erhält man z.B.: (endlich!)

$$(\varepsilon|(ab)^*)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fall } \gamma=(\alpha|\beta)}}{=} \varepsilon' \,|((ab)^*)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fälle } \gamma=\varepsilon \\ \text{und } \gamma=(\alpha)^*}}{=} \varepsilon \,|((ab)')^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fall } \gamma=\alpha\beta}}{=} \varepsilon|(a'b')^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fall } \gamma=a \\ \text{für } a\in\Sigma}}{=} \varepsilon|(a^*b^*)^*$$

5. Sei L regulär.

$\overset{\text{S.v. Kleene}}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$.

$\overset{4.}{\Longrightarrow}$ Es gibt einen regulären Ausdruck γ' mit $[\![L]\!] = [\![L(\gamma)]\!] = L(\gamma')$.

$\overset{\text{S.v. Kleene}}{\Longrightarrow}$ $[\![L]\!]$ ist regulär. $\square$

$\boxed{A5}$

1. <u>Wahr</u>! Jede Sprache ist eine Menge von Wörtern.

2. <u>Falsch</u>! Das gilt nur, falls A die leere Menge <u>als Element</u> enthält. $\emptyset \in \{\emptyset, a, b\}$, aber $\emptyset \in \{a,b\}$. Richtig wäre die Aussage mit „$\subseteq$" statt „$\in$".

3. <u>Falsch</u>! Die Menge $\{\emptyset\}$ enthält $\emptyset$ als Element. D.h. $|\{\emptyset\}| = 1$. Nicht verwechseln mit $|\emptyset| = |\{\}| = 0$.

4. <u>Wahr</u>! Es gilt: $\varepsilon \in \{\varepsilon\} = A^0 \subseteq A^*$.

5. <u>Wahr</u>! Es gilt: $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n = A^0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A^n = \{\varepsilon\} \cup A^+$.

6. <u>Falsch</u>! A^+ kann auch ε enthalten, wenn $\varepsilon \in A$ gilt. Für $A = \{\varepsilon\}$ gilt beispielsweise $A^* \setminus \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \setminus \{\varepsilon\} = \emptyset$, aber $A^+ = \{\varepsilon\}$.

7. <u>Falsch</u>! Das gilt sogar für <u>kein</u> Alphabet! Ein Alphabet enthält immer nur Wörter der Länge 1 (= „Buchstaben") und ε hat Länge $|\varepsilon| = 0$.

8. <u>Falsch</u>! Die einzigen zwei Gegenbeispiele hierfür sind $A = \emptyset$ und $A = \{\varepsilon\}$. In beiden Fällen gilt $A^* = \{\varepsilon\}$, also $|A^*| = 1$.

9. <u>Falsch!</u> Bei der Konkatenation von Sprachen können Duplikate entstehen.

Beispielsweise gilt für $A = B = \{\varepsilon, a\}$:

$$|AB| = |\{\varepsilon, a, a, aa\}| = |\{\varepsilon, a, aa\}| = 3,$$

obwohl $|A||B| = 2 \cdot 2 = 4$. „AB" nicht mit „$A \times B$" verwechseln!

10. <u>Falsch!</u> Gegenbeispiel: $|ab| = 2 \neq 1 \cdot 1 = |a||b|$.

Richtig wäre: $|uv| = |u| + |v|$.

11. <u>Falsch!</u> Gegenbeispiel: $|a^2| = |aa| = 2 \neq 1^2 = |a|^2$.

Richtig wäre: $|w^n| = n \cdot |w|$.

12. <u>Richtig!</u> Die Konkatenation zweier Wörter gerader Länge liefert wieder ein Wort mit gerader Länge. Somit sind alle Wörter in $A, A^2, A^3, \ldots$ Wörter mit gerader Länge.

13. <u>Falsch!</u> Gegenbeispiel: $bb \in A^2 \subseteq A^+$.

14. <u>Richtig!</u> abb ist in der linken und aa in der rechten Sprache enthalten.

15. <u>Falsch!</u> Es gibt keine Wörter u, v mit $u \in \{a\}^*$, $v \in \{b\}^*$ und $uv = aabba$.

16. <u>Richtig!</u> $bb \in \{aa, bb\}$, $aa \in \{a\}^*$ und $ba \in \{ab, ba\}$.

17. <u>Richtig!</u> aa und babab (bzw. aab und abab) sind jeweils in $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 2\}$ enthalten.

18. <u>Falsch!</u> Es gibt keine Wörter u, v mit $|u|_a = 2$, $|v|_b = 2$ und $uv = abbaab$.

19. <u>Falsch!</u> $w = a^3 b^3$ ist wegen $|w|_a = 3 = |w|_b$ nicht in der zweiten Sprache enthalten und somit auch nicht im Schnitt der beiden.

20. <u>Richtig!</u> Es gilt $aaa \in \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $bb \in \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wichtig: Das eine n hat mit dem anderen nichts zu tun. Die Aussage ist äquivalent zu $aaabb \in \{a\}^* \{b\}^*$.

$\boxed{\text{A6}}$

1. $L = \{ w \in \Sigma^* \mid 10 \leq |w|_a \leq 15 \}$

2. $L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| = 50 \}$

3. $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists n \geq 1 : |w|_b = 3n \}$

   $= \{ w \in \Sigma^* \mid 3 \text{ teilt } |w|_b \wedge |w|_b \geq 3 \}$

4. $L = \{ w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \vee \exists n \geq 1 : |w|_a = 7n \}$

   „$\exists n \geq 0 : |w|_a = 7n$" wäre falsch, da $b, bb, bbb, \ldots \notin L$.

   $= \{ w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \vee (7 \text{ teilt } |w|_a \wedge |w|_a \geq 7) \}$

5. $L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_b = |w|_a + 8 \}$

6. $L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2|w|_b \}$

   Hier ändert sich tatsächlich nichts.

$\boxed{A7}$

1. $Z = \{1, \ldots, 5\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{3, 5\}$.

2. $\delta(3, b) = 4$,

$\hat{\delta}(2, \varepsilon) = 2$,

$\hat{\delta}(1, ab) = \hat{\delta}(\delta(1, a), b) = \hat{\delta}(2, b) = \hat{\delta}(\delta(2, b), \varepsilon)$

$= \hat{\delta}(3, \varepsilon) = 3$.

3. $T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid$ ab oder ba ist ein Suffix von $w\}$.