TI 1 - Ergänzung 6

A1

1.

	Magma	Halbgruppe	Monoid	Gruppe	kommutativ
$(\mathbb{N},+)$	✓	✓	✓	✗	✓
$(\mathbb{N},-)$	✗	✗	✗	✗	✗
$(\mathbb{Z},+)$	✓	✓	✓	✓	✓
$(\mathbb{Z},-)$	✓	✗	✗	✗	✗
$(\mathbb{N},\max)$	✓	✓	✓	✗	✓
$(\mathbb{N},\min)$	✓	✓	✗	✗	✓
$(\mathbb{Q},\cdot)$	✓	✓	✓	✗	✓
$(\{a,b\}^*,\cdot)$	✓	✓	✓	✗	✗

2. (a) Ja! Das neutrale Element 1 ist $1 = d$.

(b) Ja! Die Inversen sind:

$$\underbrace{a^{-1} = a,\ b^{-1} = b,\ c^{-1} = c,\ d^{-1} = d}_{\text{solche Elemente nennt man „selbstinvers"}},\ e^{-1} = f,\ f^{-1} = e$$

(c) Nein! Gegenbeispiel:

$$a \circ b = e \neq f = b \circ a.$$

$\boxed{A2}$

1. Die neutralen Elemente sind 0 und 1.

   $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $\varphi(x) = e^x$.

   Dann gilt $\varphi(0) = e^0 = 1$ und für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$:

   $$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y) .$$

   Alternative Lösungen wären: $\varphi(x) = a^x$ für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ oder $\varphi(x) = 1$.

2. Die neutralen Elemente sind ε und 0.

   $\varphi : \{a,b\}^* \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(x) = |x|$.

   Dann gilt $\varphi(\varepsilon) = |\varepsilon| = 0$ und für beliebige $x, y \in \{a,b\}^*$:

   $$\varphi(x \cdot y) = |x \cdot y| = |xy| = |x| + |y| = \varphi(x) + \varphi(y) .$$

   Alternative Lösungen wären z.B.: $\varphi(x) = |x|_a$, $\varphi(x) = |x|_b$ oder $\varphi(x) = 0$.

3.

Abgeschlossenheit:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig.

$\Longrightarrow$ $2x, 2y, xy \in \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen.

$\Longrightarrow$ $x \circ y = 2x + 2y + xy + 2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Assoziativität:

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\Longrightarrow (x \circ y) \circ z = (2x + 2y + xy + 2) \circ z$$
$$= 2(2x + 2y + xy + 2) + 2z + (2x + 2y + xy + 2)z + 2$$
$$= 4x + 4y + 4z + 2xy + 2xz + 2yz + xyz + 6$$

und

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (2y + 2z + yz + 2)$$
$$= 2x + 2(2y + 2z + yz + 2) + x(2y + 2z + yz + 2) + 2$$
$$= 4x + 4y + 4z + 2xy + 2xz + 2yz + xyz + 6.$$

$\Longrightarrow$ $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. $\square$

Existenz eines neutralen Elements e: Die Notation 1 wäre hier sehr verwirrend!

Wähle $e = -1$. (*)

Dann gilt für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

$$x \circ e = 2x - 2 - x + 2 = x \quad \text{und} \quad e \circ x = -2 + 2x - x + 2 = x.$$

(*) Wie kommt man darauf? z.B. $x \circ e = x$ aufstellen und nach e lösen.

Nichtexistenz von Inversen

Damit ein $x \in \mathbb{R}$ ein Inverses $y \in \mathbb{R}$ besitzt, muss gelten:

$$x \circ y = -1 \iff 2x + 2y + xy + 2 = -1$$
$$\iff (2+x)y = -3 - 2x.$$

Für $x \neq -2$ kann man diesen Ausdruck zu $y = \frac{-3-2x}{2+x}$ umformen und erhalten ein Inverses für x. Allerdings führt $x = -2$ zu einem Widerspruch $(0 = 1)$, sodass die Gleichung $-2 \circ y = -1$ für kein $y \in \mathbb{R}$ erfüllbar ist.

Somit besitzt -2 kein Inverses und $(\mathbb{R}, \circ)$ ist demnach keine Gruppe.

$\boxed{A3}$ Aufgrund der großen Anzahl an Beweisen werden diese nur skizziert.

1. Keine Äquivalenzrelation, da nicht symmetrisch (z.B. $1 < 2$, aber $(2 \nless 1)$. Auch nicht reflexiv (z.B. $1 \nless 1$).

2. Ja!

   Reflexivität: $x^2 = x^2$ ✓

   Symmetrie: $x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$ ✓

   Transitivität: $x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$ ✓

3. Ja! (Erinnerung: $x \equiv y \bmod n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: y = x + kn$.)

   Reflexivität: Für $k = 0$ gilt $x = x + 3k$. ✓

   Symmetrie: Gilt $y = x + 3k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt $x = y + 3k'$ für $k' = -k$. ✓

   Transitivität: Gelten $y = x + 3k$ und $z = y + 3k'$ für $k, k' \in \mathbb{Z}$, dann gilt $z = x + 3k''$ für $k'' = k + k'$ (siehe Ergänzung 1, Aufgabe 6). ✓

4. Ja!

   Reflexivität: $|x| = |x|$ ✓

   Symmetrie: $|x| = |y| \Rightarrow |y| = |x|$ ✓

   Transitivität: $|x| = |y| \wedge |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z|$ ✓

5. Keine Äquivalenzrelation, da nicht symmetrisch (z.B. a Teilwort von ab, aber ab kein Teilwort von a).

$\boxed{A4}$

1. Äquivalenzklassen:

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ [-2]_\sim = \{-2,2\}, \\ [-1]_\sim = \{-1,1\}, \\ [0]_\sim = \{0\}, \\ [1]_\sim = \{-1,1\}, \\ [2]_\sim = \{-2,2\}, \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \text{allgemein: } [k]_\sim = \{-k,k\}$$

$[k]_\sim = [-k]_\sim$

$$\Longrightarrow \mathbb{Z}/\sim \; = \{[k]_\sim \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\{-k,k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

mit $|\mathbb{Z}/\sim| = \infty$.

2. Äquivalenzklassen:

$[0]_\sim = \{\dots,-6,-3,0,3,6,\dots\}$,

$[1]_\sim = \{\dots,-5,-2,1,4,7,\dots\}$, z.B. $[-5]_\sim = [1]_\sim$

$[2]_\sim = \{\dots,-4,-1,2,5,8,\dots\}$.

Alle restlichen Äquivalenzklassen sind gleich einer dieser drei.

$$\Longrightarrow \mathbb{Z}/\sim \; = \{[0]_\sim,[1]_\sim,[2]_\sim\} \quad \text{mit } |\mathbb{Z}/\sim| = 3.$$

3. Äquivalenzklassen:

$[\varepsilon]_\sim = \{\varepsilon\}$

$[a]_\sim = \{a, b\}$

$[aa]_\sim = \{aa, ab, ba, bb\}$

$[aaa]_\sim = \{aaa, \dots, bbb\}$

$\vdots$

allgemein:

$[a^k]_\sim = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| = k\}$

$\Longrightarrow \{a,b\}^*/\sim \; = \underline{\underline{\{[a^k]_\sim \mid k \in \mathbb{N}\}}}$ mit $[a^k]_\sim$ wie oben

und $|\{a,b\}^*/\sim| = \underline{\underline{\infty}}$.

$\boxed{A5}$

1. Wähle $\sim'$ mit $x \sim' y \Leftrightarrow x \equiv y \mod 6$. Dann gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$x \sim' y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: y = x + 6k$$
$$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}: y = x + 3k', \text{ nämlich } k' = 2k$$
$$\Rightarrow x \sim y.$$

Äquivalenzklassen:

$$\left.\begin{array}{l} [0]_{\sim'} = \{\dots, -12, -6, 0, 6, 12, \dots\} \\ [1]_{\sim'} = \{\dots, -11, -5, 1, 7, 13, \dots\} \\ \vdots \\ [5]_{\sim'} = \{\dots, -7, -1, 4, 11, 17, \dots\} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} [0]_{\sim'}, [3]_{\sim'} \subseteq [0]_{\sim} \\ [1]_{\sim'}, [4]_{\sim'} \subseteq [1]_{\sim} \\ [2]_{\sim'}, [5]_{\sim'} \subseteq [2]_{\sim} \end{array}$$

2. Wähle $\sim'$ mit $x \sim' y \Leftrightarrow |x|_a = |y|_a \wedge |x|_b = |y|_b$. Dann gilt für beliebige $x, y \in \{a,b\}^*$:

$$x \sim' y \Rightarrow |x|_a = |y|_a \wedge |x|_b = |y|_b$$
$$\Rightarrow |x| = |x|_a + |x|_b = |y|_a + |y|_b = |y|$$
$$\Rightarrow x \sim y.$$

Beispiel: Die Äquivalenzklasse $[aaa]_{\sim} = \{aaa, \dots, bbb\}$ zerfällt in 4 „feinere" Klassen:

$[aaa]_{\sim'} = \{aaa\}$, $[aab]_{\sim'} = \{aab, aba, baa\}$, $[abb]_{\sim'} = \{abb, bab, bba\}$ und $[bbb]_{\sim'} = \{bbb\}$.

$\boxed{A6}$

1. Keine Kongruenzrelation, da beispielsweise $-1 \sim 1$ und $2 \sim 2$, aber $1 \not\sim 3$.

2. Ja! Für beliebige $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
x \sim x' \wedge y \sim y' &\Rightarrow x^2 = x'^2 \wedge y^2 = y'^2 \\
&\Rightarrow x^2 \cdot y^2 = x'^2 \cdot y'^2 \\
&\Rightarrow (x \cdot y)^2 = (x' \cdot y')^2 \\
&\Rightarrow x \cdot y \sim x' \cdot y' . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Verknüpfungstafel:

$$
\begin{array}{rc|cccc}
 & & \{0\} & \{-1,1\} & \{-2,2\} & \\
 & & \| & \| & \| & \\
 & \cdot & [0]_\sim & [1]_\sim & [2]_\sim & \cdots \\
\hline
\{0\} = & [0]_\sim & [0]_\sim & [0]_\sim & [0]_\sim & \cdots \\
\{-1,1\} = & [1]_\sim & [0]_\sim & [1]_\sim & [2]_\sim & \cdots \\
\{-2,2\} = & [2]_\sim & [0]_\sim & [2]_\sim & [4]_\sim & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

3. Ja! Für beliebige $x, x', y, y' \in \{a,b\}^*$ gilt:

$$\begin{aligned}
x \sim x' \wedge y \sim y' &\Rightarrow |x| = |x'| \wedge |y| = |y'| \\
&\Rightarrow |x| + |y| = |x'| + |y'| \\
&\Rightarrow |x \cdot y| = |x' \cdot y'| \\
&\Rightarrow x \cdot y \sim x' \cdot y' . \qquad \square
\end{aligned}$$

Verknüpfungstafel:

$\cdot$	$[\varepsilon]_\sim$	$[a]_\sim$	$[aa]_\sim$	$\cdots$
$[\varepsilon]_\sim$	$[\varepsilon]_\sim$	$[a]_\sim$	$[aa]_\sim$	$\cdots$
$[a]_\sim$	$[a]_\sim$	$[aa]_\sim$	$[aaa]_\sim$	$\cdots$
$[aa]_\sim$	$[aa]_\sim$	$[aaa]_\sim$	$[aaaa]_\sim$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

4. Ja! Für beliebige $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
x \sim x' \wedge y \sim y' &\Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z}: x' = x + 3k \wedge y' = y + 3k' \\
&\Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z}: x' + y' = x + y + 3k + 3k' \\
&\Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{Z}: x' + y' = x + y + 3k'' \quad (k'' = k + k') \\
&\Rightarrow x + y \sim x' + y' . \qquad \square
\end{aligned}$$

Verknüpfungstafel:

$+$	$[0]_\sim$	$[1]_\sim$	$[2]_\sim$
$[0]_\sim$	$[0]_\sim$	$[1]_\sim$	$[2]_\sim$
$[1]_\sim$	$[1]_\sim$	$[2]_\sim$	$[0]_\sim$ ← $[3]_\sim = [0]$
$[2]_\sim$	$[2]_\sim$	$[0]_\sim$ ↑ $[3]_\sim = [0]_\sim$	$[1]_\sim$ ← $[4]_\sim = [1]_\sim$

5. Ja! Für beliebige $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
x \sim x' \wedge y \sim y' &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : x' = x + 3k \wedge y' = y + 3k' \\
&\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : x' \cdot y' = (x+3k) \cdot (y + 3k') \\
&\qquad = x \cdot y + 3k'x + 3ky + 9kk' \\
&\qquad = x \cdot y + 3 \cdot \underbrace{(k'x + ky + 3kk')}_{=: k'' \in \mathbb{Z}} \\
&\Longrightarrow \exists k'' \in \mathbb{Z} : x' \cdot y' = x \cdot y + 3k'' \\
&\Longrightarrow x \cdot y \sim x' \cdot y'. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Verknüpfungstafel:

$\cdot$	$[0]_\sim$	$[1]_\sim$	$[2]_\sim$
$[0]_\sim$	$[0]_\sim$	$[0]_\sim$	$[0]_\sim$
$[1]_\sim$	$[0]_\sim$	$[1]_\sim$	$[2]_\sim$
$[2]_\sim$	$[0]_\sim$	$[2]_\sim$	$[1]_\sim$ ← $[4]_\sim = [1]_\sim$

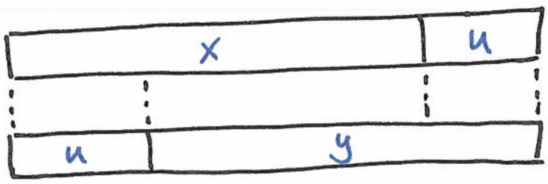
$\boxed{A7}$

Vorüberlegungen:

Wie sehen Wörter u, x, y aus, die $xu = uy$ erfüllen?

1) x und y müssen die gleiche Länge haben, sonst wären xu und uy unterschiedlich lang und somit ungleich.

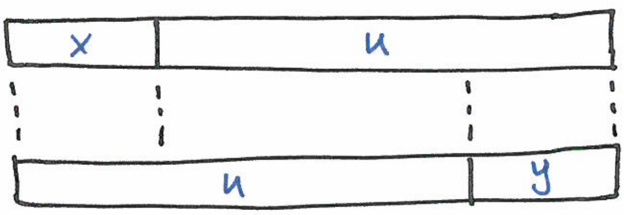
2) Falls $|u| \leq |x|, |y|$:



$\Longrightarrow$ es gibt ein Wort t mit $x = ut$ bzw. $y = tu$.

Im Falle $|u| = |x| = |y|$ ist dieses Wort genau ε, d.h. es gilt $u = x = y$.

3) Falls $|u| > |x|, |y|$:



$\Longrightarrow$ x ist ein Präfix von u

$\Longrightarrow$ $u = xu'$ für ein $u' \in \Sigma^*$.

Für dieses u' gilt $xxu' = xu'y$, also auch $xu' = u'y$. Falls $x \neq \varepsilon$, dann gilt $|u'| < |u|$ und man kann mit derselben Argumentation Wörter $u', u'', \ldots, u^{(k)}$ mit

u mit k Strichen

$$|u| > |u'| > |u''| > \ldots > |u^{(k)}| \quad \text{und} \quad |u^{(k)}| < |x|, |y|$$

finden, die alle die Gleichung $xu^{(i)} = u^{(i)}y$ erfüllen. Wegen $|u^{(k)}| < |x|, |y|$ folgt mit 2):

$$x = u^{(k)}t, \quad y = tu^{(k)} \quad \text{und} \quad u = x^k u^{(k)} = (u^{(k)}t)^k u^{(k)}.$$

Wir fassen diese Überlegungen als Lemma (= Hilfssatz) zusammen, wobei wir das Wort u aus 2) bzw. das Wort $u^{(k)}$ aus 3) als s bezeichnen.

Lemma:

Für alle Wörter $u, x, y \in \Sigma^*$ mit $xu = uy$ und $x \neq \varepsilon$ gilt:

$$\exists s, t \in \Sigma^*, k \in \mathbb{N}: \; x = st \wedge y = ts \wedge u = (st)^k s.$$

Lösung:

- Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Wähle $u = \varepsilon$, dann gilt $xu = ux$.
  $\Rightarrow \sim$ reflexiv.

- Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \sim y$. Dann gibt es ein $u \in \Sigma^*$ mit $xu = uy$. Aus unserem Lemma wissen wir, dass Wörter $s, t \in \Sigma^*$

und $k \in \mathbb{N}$ existieren mit $x = st$, $y = ts$ und $u = (st)^k s$. Wähle $v = t$, dann gilt $yv = vx$, d.h. $y \sim x$.

$\Rightarrow$ $\sim$ symmetrisch.

- Seien $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gibt es Wörter $u, v \in \Sigma^*$ mit $xu = uy$ und $yv = vz$. Wähle $w = uv$. Dann gilt:

$$xw = xuv = uyv = uvz = wz,$$

d.h. $x \sim z$.

$\Rightarrow$ $\sim$ transitiv.

- $\sim$ ist keine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$, da beispielsweise gilt:

  $ab \sim ba$ und $cd \sim dc$, aber $abcd \not\sim badc$.