TI1 - Ergänzung 8

A1

1.

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

(a) Ja! $(M, \cdot)$ ist abgeschlossen, assoziativ und besitzt ein neutrales Element e $(e = 1)$.

(b) Nein! -1 und 1 haben zwar ein Inverses $((-1)^{-1} = -1,\ 1^{-1} = 1)$, aber 0 nicht.

2. Damit $\hat{\varphi}$ ein Monoidhomomorphismus ist, muss

$$\hat{\varphi}(a_1 \dots a_n) = \hat{\varphi}(a_1) \cdot \ldots \cdot \hat{\varphi}(a_n)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ gelten, z.B.:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(abac) &= \hat{\varphi}(a) \cdot \hat{\varphi}(b) \cdot \hat{\varphi}(a) \cdot \hat{\varphi}(c) \\
&= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \varphi(a) \cdot \varphi(c) \\
&= (-1) \cdot 0 \cdot (-1) \cdot 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

<u>Vermutung</u>: $\hat{\varphi} : \Sigma^* \longrightarrow M$ mit:

$$\hat{\varphi}(w) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |w|_b \geq 1 \\ (-1)^{|w|_a}, & \text{falls } |w|_b = 0 . \end{cases}$$

<u>Beweis</u>:

- Es gilt $\hat{\varphi}(a) = (-1)^1 = \varphi(a)$, $\hat{\varphi}(b) = 0 = \varphi(b)$ und $\hat{\varphi}(c) = (-1)^0 = 1 = \varphi(c)$, d.h. $\hat{\varphi}$ ist tatsächlich eine Erweiterung von φ.

- Es gilt $\hat{\varphi}(\varepsilon) = (-1)^0 = 1$ und für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

  <u>Fall 1</u>: $|x|_b \geq 1$ oder $|y|_b \geq 1$.

  $\Longrightarrow |xy|_b \geq 1$ und $\hat{\varphi}(x) = 0$ oder $\hat{\varphi}(y) = 0$.

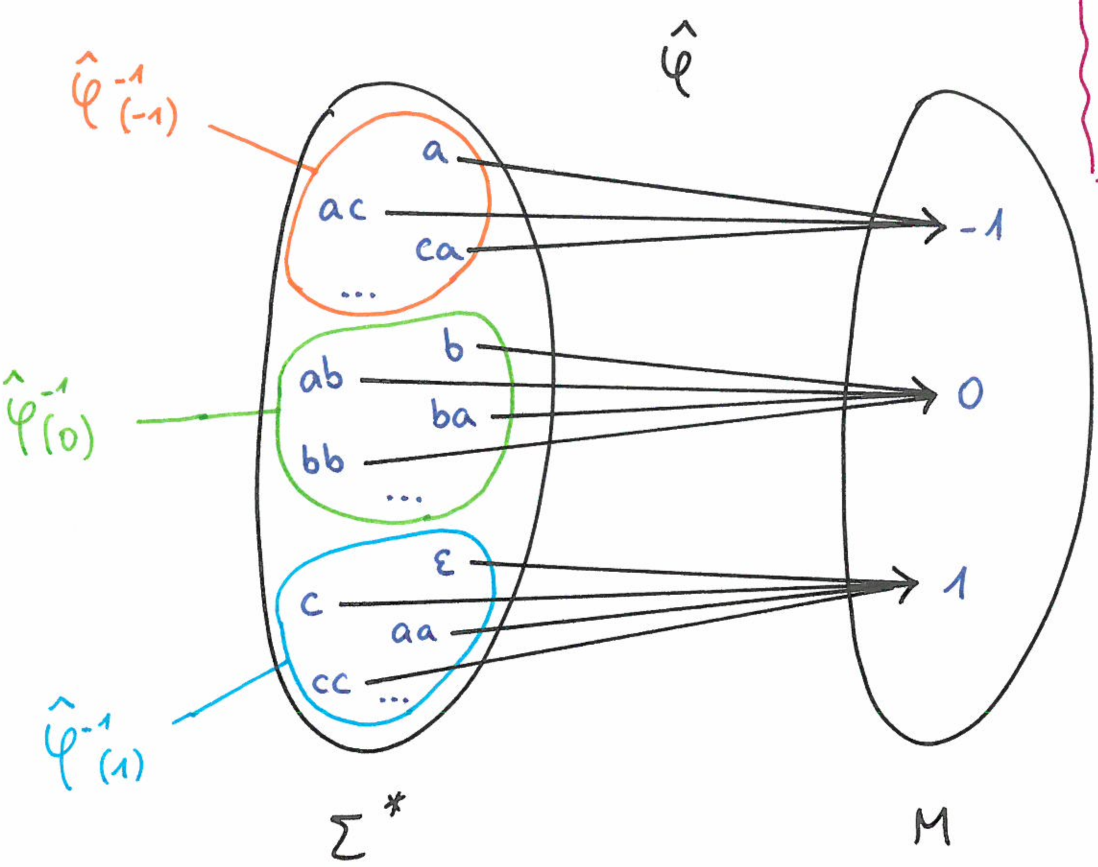
  $\Longrightarrow \hat{\varphi}(xy) = 0 = \hat{\varphi}(x) \cdot \hat{\varphi}(y)$.

  <u>Fall 2</u>: $|x|_b, |y|_b = 0$.

  $\Longrightarrow |xy|_b = 0$.

  $\Longrightarrow \hat{\varphi}(xy) = (-1)^{|xy|_a} = (-1)^{|x|_a + |y|_b} = (-1)^{|x|_a} \cdot (-1)^{|y|_b} = \hat{\varphi}(x) \cdot \hat{\varphi}(y)$.

Wegen $\hat{\varphi}(\varepsilon) = 1$ und $\hat{\varphi}(xy) = \hat{\varphi}(x) \cdot \hat{\varphi}(y)$ für alle $x, y \in \Sigma^*$ ist $\hat{\varphi}$ tatsächlich ein Monoidhomomorphismus.



⚠ $\hat{\varphi}^{-1}$ ist keine Umkehrfunktion, sondern die Urbildmenge!

Folgende Sprachen L werden von $(M,\cdot)$ mit $\hat{\varphi}$ erkannt:

L	A bzw. $\varphi(L)$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{w \in \Sigma^* \mid \lvert w\rvert_b = 0 \wedge \lvert w\rvert_a \text{ ungerade}\}$	$\{-1\}$
$\{w \in \Sigma^* \mid \lvert w\rvert_b \geq 1\}$	$\{0\}$
$\{w \in \Sigma^* \mid \lvert w\rvert_b = 0 \wedge \lvert w\rvert_a \text{ gerade}\}$	$\{1\}$
$\{w \in \Sigma^* \mid \lvert w\rvert_b \geq 1 \vee \lvert w\rvert_a \text{ ungerade}\}$	$\{-1,0\}$
$\{w \in \Sigma^* \mid \lvert w\rvert_b = 0\} = \{a,c\}^*$	$\{-1,1\}$
$\{w \in \Sigma^* \mid \lvert w\rvert_b \geq 1 \vee \lvert w\rvert_a \text{ gerade}\}$	$\{0,1\}$
Σ^*	$\{-1,0,1\}$

Für Interessierte:

Für jede beliebige Funktion $\varphi : A \to B$ ist $\sim$ mit

$$x \sim y \iff \varphi(x) = \varphi(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf A. Die Äquivalenzklassen sind genau die Urbilder, d.h.:

$$A/\sim \; = \{\varphi^{-1}(b) \mid b \in B\}.$$

Für alle $a \in A$ gilt dann:

$$[a]_\sim = \{a' \mid \varphi(a) = \varphi(a')\} = \underline{\varphi^{-1}(\varphi(a))}.$$

Kommt das bekannt vor?

$\boxed{A2}$

1. Sei L eine Sprache über einem Alphabet Σ. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\boxed{L \text{ ist regulär } (= \text{Typ } 3)}$
- $\exists$ RG G mit $L(G) = L$ (F. 02.5)
- $\exists$ DEA M mit $T(M) = L$ } (F. 11.1)
- $\exists$ NEA M mit $T(M) = L$
- $\exists$ RA γ mit $L(\gamma) = L$ (F. 11.5)
- $|\Sigma^*/R_L| < \infty$ (F. 14.2)
- L ist erkennbar } (F. 16.5)
- $|\underbrace{\Sigma^*/\equiv_L}_{= Synt(L)}| < \infty$

2.

(a) • Man gibt eine(n) RG/DEA/NEA/RA für L an.

- Man zeigt $|\Sigma^*/R_L| < \infty$.
- Man gibt ein Monoid M und ein Monoidhomomorphismus $\varphi: \Sigma^* \to M$ mit $\varphi^{-1}(\varphi(L)) = L$ an.
- Man zeigt $|\Sigma^*/\equiv_L| < \infty$.
- Man verwendet die Abschlusseigenschaften aus Folie 17.1.

Bsp.: Finde reguläre Sprachen A, B mit $A \cup B = L$.

(b) • Man zeigt, dass kein(e) RG/DEA/NEA/RA für L existiert.

Üblicherweise indirekt: Gäbe es eine(n) RG/DEA/NEA/RA für L, dann könnte man eine(n) RG/DEA/NEA/RA für eine nicht-reguläre Sprache L' finden.

- Man zeigt $|\Sigma^*/R_L| = \infty$.
- Man zeigt $|\Sigma^*/\equiv_L| = \infty$.

z.B. durch Angabe einer unendlichen Folge von Äquivalenzklassen, die paarweise unterschiedlich sind.

- Man verwendet das Pumping-Lemma.

Achtung! Es gibt nichtreguläre Sprachen, deren Nichtregularität sich nicht mit dem Pumping-Lemma zeigen lässt.

- Man verwendet die Abschlusseigenschaften aus Folie 17.1.

Bsp.: Finde Sprachen A, B mit A regulär, B nicht regulär und $A \cup L = B$. Dann indirekt: Wäre L regulär, dann müsste auch B regulär sein, was nicht stimmt.

$\boxed{\text{A3}}$

1. L ist kontextfrei. KFG für L: $G = (\{S,T,U\}, \{a,b\}, P, S)$ mit:

$$P = \{ S \to TU \mid U,\quad T \to aTb \mid ab,\quad U \to bU \mid b \}.$$

2. L ist nicht kontextfrei. Beweis mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (Folie 22.2). Struktur des Satzes:

$$\boxed{L \text{ nicht kontextfrei} \Leftarrow \forall n \in \mathbb{N} : \exists z \in L, |z| \geq n : \forall u,v,w,x,y \in \Sigma^*, z = uvwxy, |vx| \geq 1, |vwx| \leq n : \exists i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \notin L}$$

(vgl. Ergänzung 4, Aufgabe 2).

Beweis:

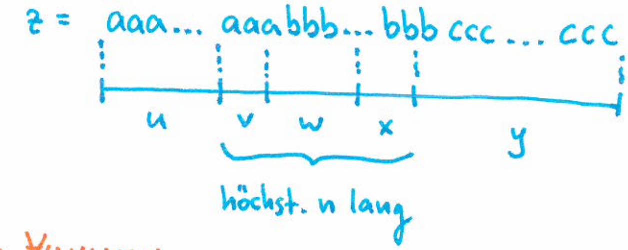
$\forall n$

Sei $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\text{beliebig}}$.

$\exists z$ $\boxed{\text{Wähle}}$ $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$.

$\Longrightarrow z \in L$ und $|z| = 3n+3 \geq n$.

Skizze:



$\forall u,v,w,x,y$

Seien nun $u,v,w,x,y \in \Sigma^*$ $\boxed{\text{beliebig}}$ mit $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$.

Fall 1: $|vx|_a \geq 1$.

$\exists i$ $\boxed{\text{Wähle}}$ $i = 3$.

$\Longrightarrow |uv^iwx^iy|_a \geq |uv^iwx^iy|_c$.

Fall 2: $|vx|_a = 0$ und $|vx|_b \geq 1$.

$\exists i$ → $\boxed{\text{Wähle}}$ $i := 0$.

$\Rightarrow |uv^iwx^iy|_a \geq |uv^iwx^iy|_b$.

Fall 3: $|vx|_a, |vx|_b = 0$.

$\exists i$ → $\boxed{\text{Wähle}}$ $i := 0$.

$\Rightarrow |uv^iwx^iy|_b \geq |uv^iwx^iy|_c$.

$\Rightarrow uv^iwx^iy \notin L$. $\square$

3. L ist nicht kontextfrei.

Angenommen, L wäre kontextfrei.

$\overset{F.24.1}{\Longrightarrow}$ L wäre regulär, da in L nur ein Buchstabe vorkommt.

$\overset{F.17.1}{\Longrightarrow}$ $L \cup \{\varepsilon, a\}$ wäre regulär, da $\{\varepsilon, a\}$ regulär ist.

$\overset{F.17.1}{\Longrightarrow}$ $\overline{L \cup \{\varepsilon, a\}}$ wäre regulär, was aber nicht stimmen kann,

denn $\overline{L \cup \{\varepsilon, a\}} = \{a^n \mid n \text{ prim}\}$ ist bekanntlich nicht regulär (Folie 13.5).

4. L ist nicht kontextfrei.

Wäre L kontextfrei, dann wäre nach Folie 25.1 auch $\{\varepsilon\} \cup L\{a\}$ kontextfrei, was nicht stimmen kann, da $\{\varepsilon\} \cup L\{a\} = \{a^m \mid m \text{ ist Quadratzahl}\}$ bekanntlich nicht kontextfrei ist (Folie 23.5).

5. L ist nicht kontextfrei.

Man kann das mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen beweisen.

Tipp: Man wählt z.B. $z = a^n b^n a^n b^n$.

6. L ist kontextfrei. KFG für L: $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit:

$$P = \{ S \to T \mid \varepsilon, \quad T \to aTa \mid bTb \mid aa \mid bb \mid a \mid b \}.$$

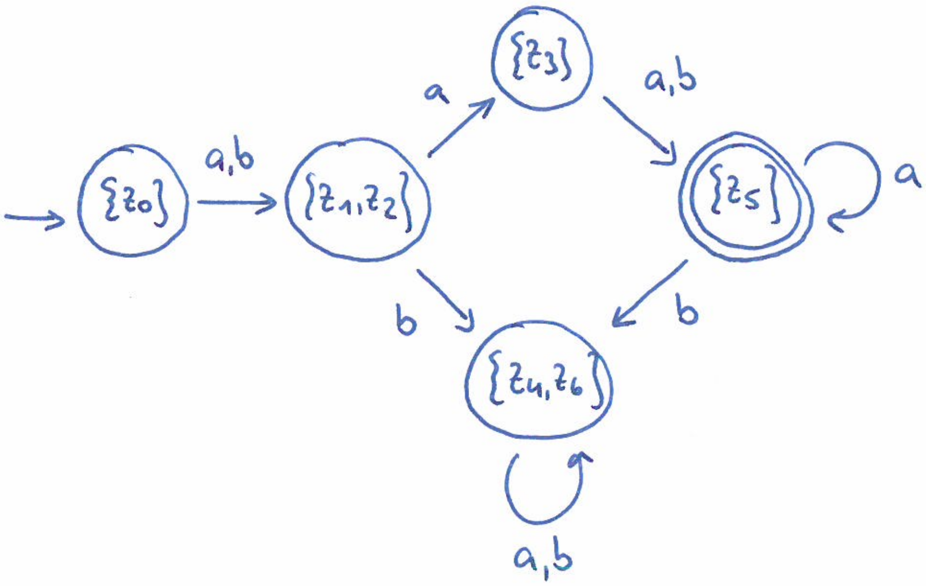
$\boxed{A4}$

Zustände z_2 und z_1 verschmelzen!

Zustände z_4 und z_6 verschmelzen!

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_1	M					
z_2	M					
z_3	M	M	M			
z_4	M	M	M	M		
z_5	M	M	M	M	M	
z_6	M	M	M	M		M

Minimalautomat:



RA: $r = (a|b)a(a|b)a^*$.