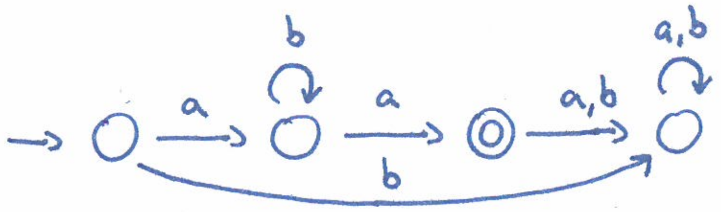
TI1 - Ergänzung 13

A1

1. Minimal-DEA für L mit $|Z|=4$ Zuständen:



Weil das syntaktische Monoid $\mathrm{Synt}(L)$ immer isomorph zum Transitionsmonoid $X = \{t_w \mid w \in \Sigma^*\}$ aus Folie 16.6 ist, gilt: $|\mathrm{Synt}(L)| = |X| \leq |Z|^{|Z|} = |\{f \mid f \text{ ist eine Funktion von } Z \text{ nach } Z\}|$.

Weil $\equiv_L$ eine Verfeinerung von R_L ist (s. Folie 16.3), gilt:

$$|\mathrm{Synt}(L)| = \underbrace{|\Sigma^*/\equiv_L|}_{\text{Index von } \equiv_L} \geq \underbrace{|\Sigma^*/R_L|}_{\text{Index von } R_L} = |Z|.$$

Zusammen:

$$\boxed{|Z| \leq |\mathrm{Synt}(L)| \leq |Z|^{|Z|}.}$$

(a) Nein

(b) Ja!

(c) Ja!

(d) Nein!

wegen $4 \leq |\mathrm{Synt}(L)| \leq 4^4 = 256$

(e) $\mathrm{Synt}(L)$ ist genau dann kommutativ, wenn durch das Vertauschen von Buchstaben eines Wortes w aus der Sprache man diese nicht verlässt.

Wegen $aba \in L$ müssten auch aab und baa in L sein, damit $\mathrm{Synt}(L)$ kommutativ ist, was nicht stimmt.

$\Longrightarrow$ Nein!

Formale Begründung durch Gegenbeispiel:

$$[ab] \cdot [a] = [aba] \neq [aab] = [a] \cdot [ab],$$

da $aba \not\equiv_L aab$ (wähle $x = y = \varepsilon$, dann gilt $xabay \in L$, aber $xaaby \notin L$).

Hier wurde wie üblich $[\ldots]$ statt $[\ldots]_{\equiv_L}$ geschrieben.

(f) Synt(L) ist genau dann eine Gruppe, wenn der Minimal-DFA „co-deterministisch" ist, d.h. wenn für alle $a \in \Sigma$ gilt: t_a ist bijektiv.

$\Longrightarrow$ Nein!

Formale Begründung durch Gegenbeispiel:

[b] besitzt kein Inverses, d.h es gibt kein $w \in \Sigma^*$ mit

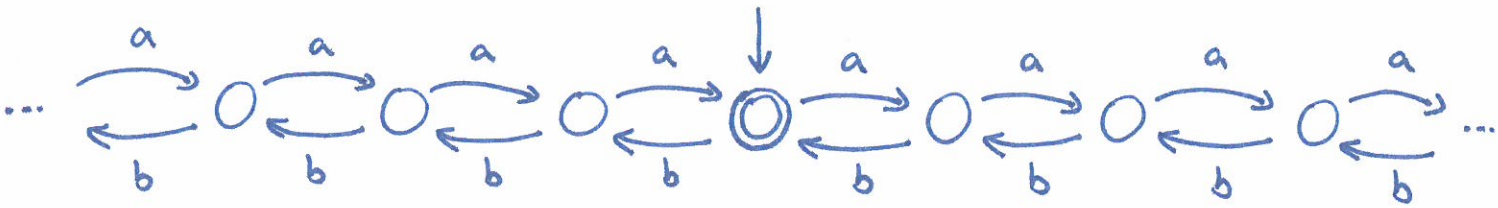
$$\underbrace{[b] \cdot [w]}_{= [bw]} = [\varepsilon] .$$

Gäbe es ein solches w, dann müsste $bw \equiv_L \varepsilon$ gelten, d.h.:

$$\forall x, y \in \Sigma^*: \; xbwy \in L \Leftrightarrow xy \in L .$$

Dies ist falsch, z.B. für $x = \varepsilon$, $y = aa$.

2. L ist nicht regulär, d.h. der „Minimalautomat" ist kein DEA:



$\Longrightarrow \; |Synt(L)| = \infty$ (Folie 16.5).

(a) Nein!

(b) Ja!

(c) Nein!

(d) Ja!

(e) Reihenfolge der Buchstaben innerhalb eines Wortes spielt keine Rolle.

$\Longrightarrow$ Ja!

Formale Begründung:

Seien $u, v \in \Sigma^*$ beliebig. Zu zeigen ist $[uv] = [vu]$, d.h. $uv \equiv_L vu$. Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$xuvy \in L \Leftrightarrow |xuvy|_a = |xuvy|_b \Leftrightarrow |xvuy|_a = |xvuy|_b \Leftrightarrow xvuy \in L$.

(f) Beim „Minimalautomat" sind t_a und b_b bijektiv.

$\Longrightarrow$ Ja!

v soll das Inverse von u sein

Formale Begründung:

Sei $u \in \Sigma^*$ beliebig. Wir zeigen, dass dann ein $v \in \Sigma^*$ existiert mit $\underbrace{[u] \cdot [v]}_{=[uv]} = [\varepsilon]$, d.h. $uv \equiv_L \varepsilon$

Wähle $v = a^{|u|_b} b^{|u|_a}$.

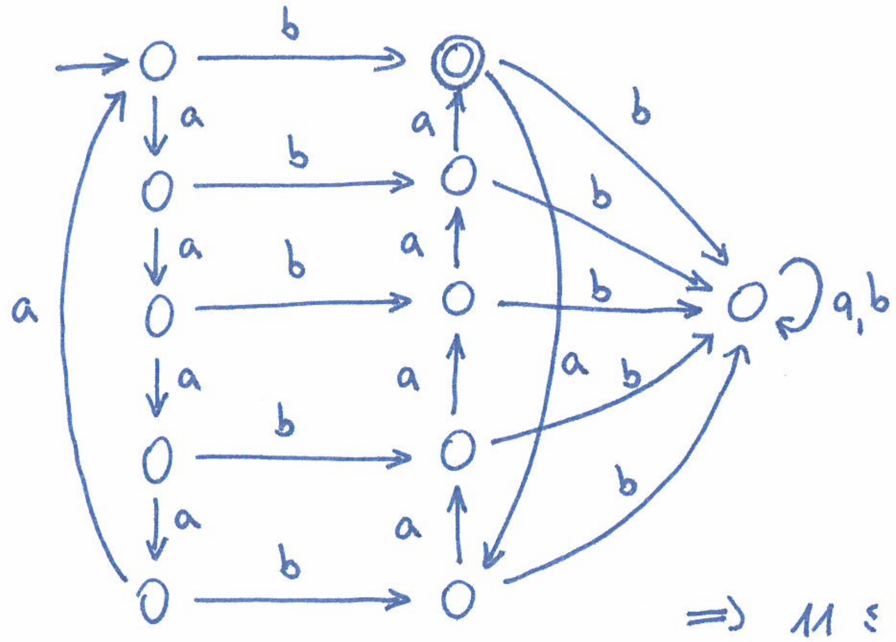
$\Longrightarrow |uv|_a = |u|_a + |u|_b = |uv|_b$.

Seien nun $x, y \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
xuvy \in L &\Longleftrightarrow |xuvy|_a = |xuvy|_b \\
&\Longleftrightarrow |xy|_a + |uv|_a = |xy|_b + |uv|_b \\
&\Longleftrightarrow |xy|_a = |xy|_b \\
&\Longleftrightarrow xy \in L.
\end{aligned}$$

A2

Minimalautomat:



$\Longrightarrow \quad 11 \leq |\mathrm{Synt}(L)| \leq 11^{11}.$

(a) Nein!

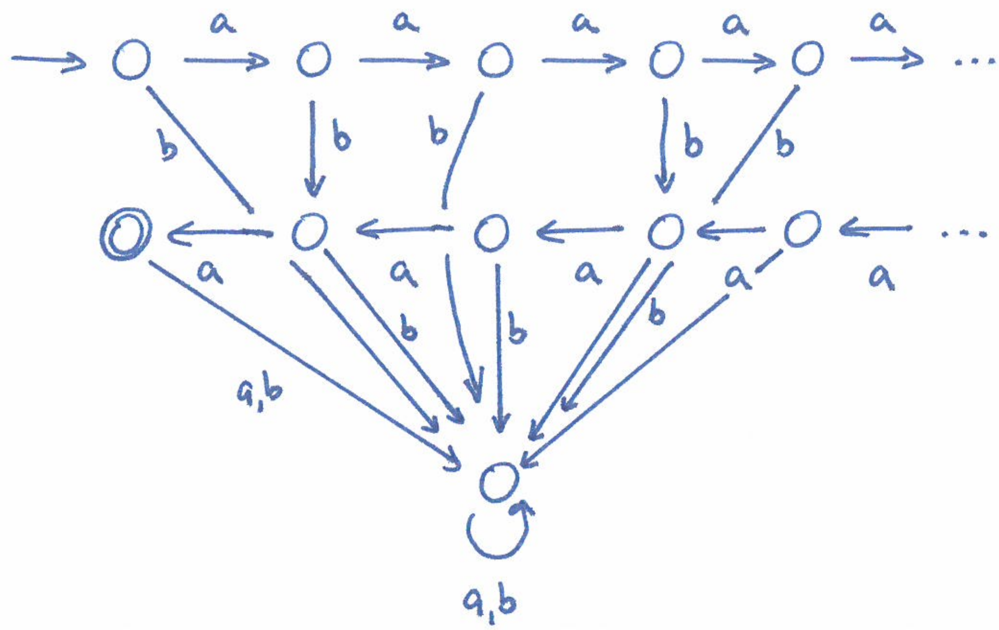
(b) Ja!

(c) Nein!

(d) Nein!

$\boxed{A3}$ L ist nicht regulär $\Rightarrow$ $|Synt(L)| = \infty$.

„Minimalautomat":



(a) ~~Ja!~~ Nein!

(b) Nein!

(c) Nein!

(d) Ja!