TI1 - Ergänzung 14

$\boxed{A1}$ $\Sigma = \{a,b\}$.

1. Zu zeigen: Für alle $w \in \Sigma^*$ mit $S \Rightarrow_G^* w$ gilt $w \in L$.

Beweis: Durch Induktion nach der Länge n der Ableitung $S \Rightarrow_G^n w$ $(n \geq 1)$.

IA: Aus $S \Rightarrow_G w$ folgt $w = \varepsilon$. Wegen $|\varepsilon|_a = 0 = |\varepsilon|_b$ ist $\varepsilon \in L$. ✓

IS: Sei $n \geq 1$ beliebig und w ein beliebiges Wort mit $S \Rightarrow_G^{n+1} w$. Angenommen, jedes Wort, das sich in $\leq n$ Schritten ableiten lässt, ist in L (IV).

Fall 1: $S \Rightarrow_G aSbS \Rightarrow_G^n w$.

Dann ist $w = aubv$ mit $S \Rightarrow_G^{\leq n} u$ und $S \Rightarrow_G^{\leq n} v$. Nach IV gilt $u, v \in L$, d.h. $|u|_a = |u|_b$ und $|v|_a = |v|_b$.

$\Rightarrow |w|_a = 1 + |u|_a + |v|_a \overset{IV}{=} 1 + |u|_b + |v|_b = |w|_b$

$\Rightarrow w \in L$.

Fall 2: $S \Rightarrow_G bSaS \Rightarrow_G^n w$ analog.

2. <u>Zu zeigen</u>: Für alle $w \in \Sigma^*$ mit $w \in L$ gilt $S \Rightarrow_G^* w$.

<u>Beweis</u>: Durch Induktion nach der Länge n des Wortes w, d.h. $|w| = n$ $(n \geq 0)$.

IA: $(n=0)$

Für $w = \varepsilon$ gilt sowohl $w \in L$ als auch $S \Rightarrow_G \varepsilon$. ✓

IS: Sei $n \geq 0$ beliebig und w ein beliebiges Wort aus L der Länge $n+1$, d.h. $w = a_0 a_1 \ldots a_n$ für $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$.
Angenommen, jedes Wort aus L der Länge $\leq n$ lässt sich in G von S ableiten.

Fall 1: $a_0 = a$. Sei $i \in \{0, \ldots, n\}$ die kleinste Zahl mit $|a_0 \ldots a_i|_a = |a_0 \ldots a_i|_b$. Diese existiert, da $|w|_a = |w|_b$ und $\{0, \ldots, n\}$ endlich.

$\Rightarrow a_i = b$. Sonst hätte $a_0 \ldots a_{i-1}$ mehr bs als as, d.h. i wäre nicht minimal.

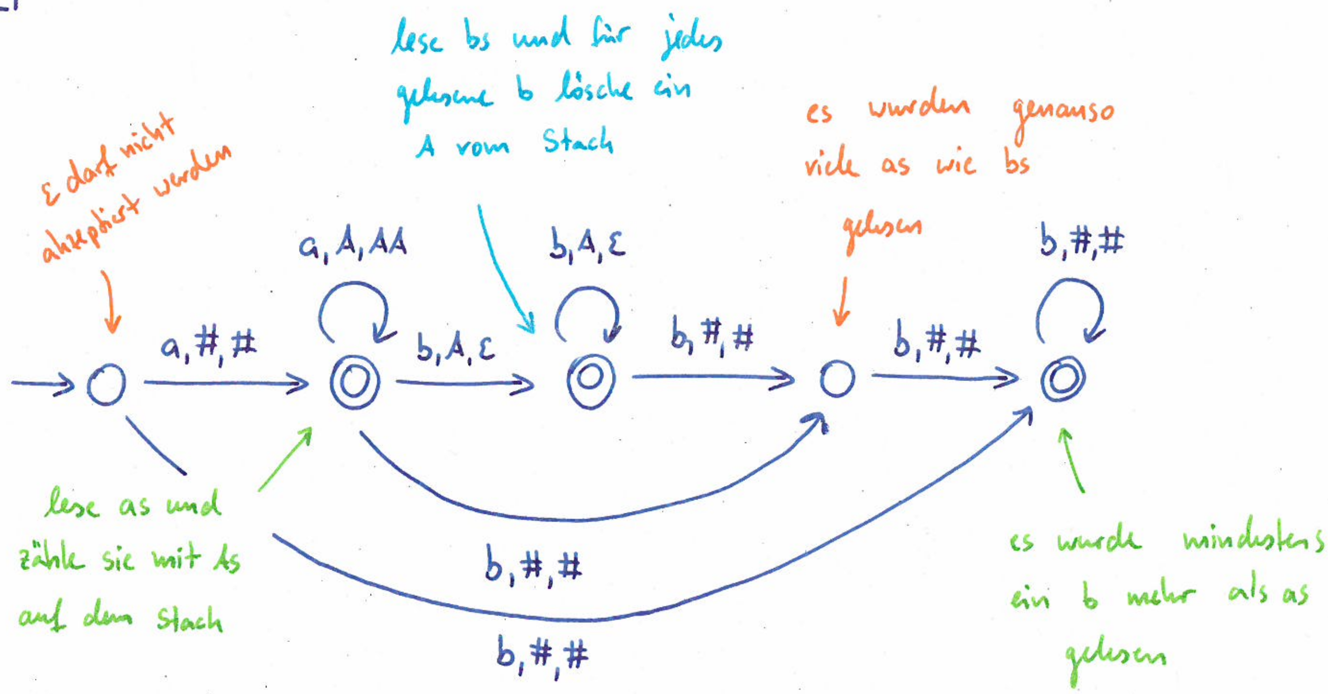
$\Rightarrow$ Nach IV gilt $S \Rightarrow_G^* a_1 \ldots a_{i-1}$ und $S \Rightarrow_G^* a_{i+1} \ldots a_n$

$\Rightarrow$ $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow^* a_0 \ldots a_n = w$.

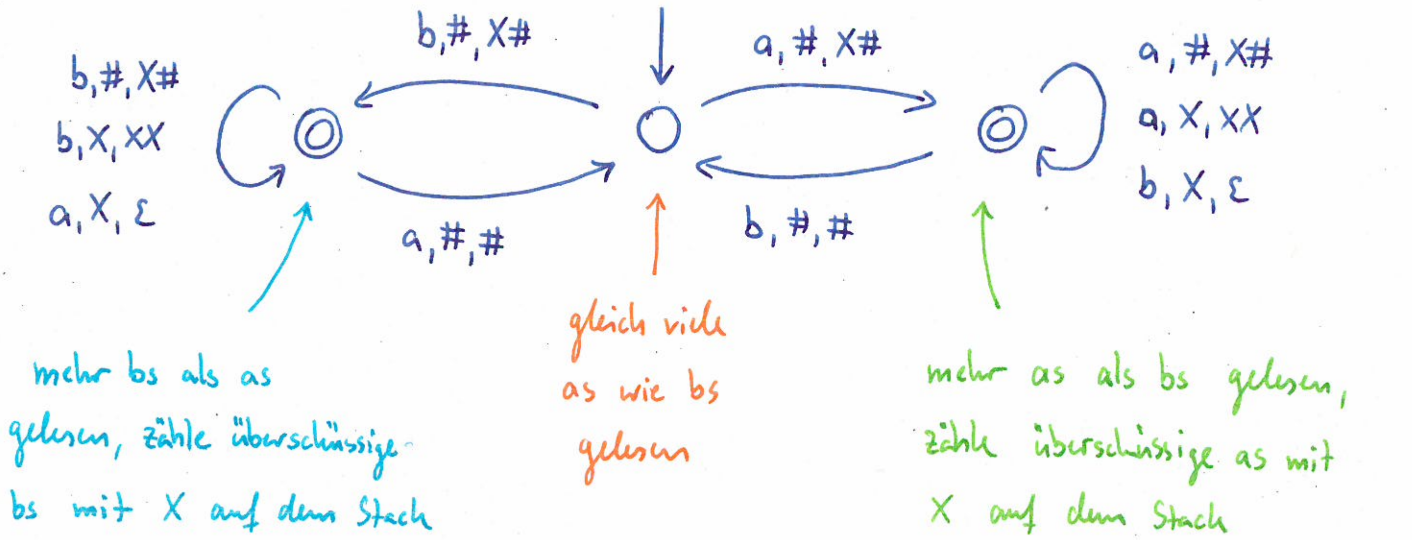
Fall 2: $a_0 = b$ analog.

A2

1.


ε darf nicht akzeptiert werden
a, #, #
a, A, AA
lese bs und für jedes gelesene b lösche ein A vom Stack
b, A, ε
b, A, ε
b, #, #
es wurden genauso viele as wie bs gelesen
b, #, #
b, #, #
lese as und zähle sie mit As auf dem Stack
b, #, #
b, #, #
es wurde mindestens ein b mehr als as gelesen

2.


b, #, X#
b, X, XX
a, X, ε
b, #, X#
a, #, X#
a, #, X#
a, X, XX
b, X, ε
a, #, #
b, #, #
mehr bs als as gelesen, zähle überschüssige bs mit X auf dem Stack
gleich viele as wie bs gelesen
mehr as als bs gelesen, zähle überschüssige as mit X auf dem Stack

$\boxed{A3}$

1. Es soll $f_M(u) = v$ genau dann gelten, wenn $pu \vdash^* tv$ und kein anderes Wort w die Bedingung $pu \vdash^* tw$ erfüllt.

- $p10 \vdash 1q0 \vdash 10q \vdash 1r0 \vdash s11 \vdash s\square 11 \vdash t11 \circlearrowright$

  $\Longrightarrow f_M(10) = \underline{\underline{11}}.$

  M verlässt die Konfiguration $t11$ nicht: $t11 \vdash t11 \vdash t11 \vdash \ldots$

- $p1011 \vdash 1q011 \vdash 10q11 \vdash 101q1 \vdash 1011q \vdash 101r1$

  $\vdash 10r10 \vdash 1r000 \vdash s1100 \vdash s\square 1100 \vdash t1100 \circlearrowright$

  $\Longrightarrow f_M(1011) = \underline{\underline{1100}}.$

- $p111 \vdash 1q11 \vdash 11q1 \vdash 111q \vdash 11r1 \vdash 1r10 \vdash r100$

  $\vdash r\square 000 \vdash t1000 \circlearrowright$

  $\Longrightarrow f_M(111) = \underline{\underline{1000}}.$

- $p00000 \vdash p0000 \vdash p000 \vdash p00 \vdash p0 \vdash p \vdash t1 \circlearrowright$

  $\Longrightarrow f_M(00000) = \underline{\underline{1}}.$

2. Es gilt: $f_M(u) = v \Leftrightarrow v = u+1$ (in Binärdarstellung) und v besitzt keine führenden Nullen (d.h. $v \in L(0 \mid 1(0|1)^*)$).