Die Funktion $\hat{\delta}$

Auch im nichtdeterministischen Fall erweitern wir die Funktion δ zu ihrer *iterierten Version* $\hat{\delta}$:

$\hat{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$ ist induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(Z', \varepsilon) &= Z' && \text{für alle } Z' \subseteq Z \\ \hat{\delta}(Z', ax) &= \bigcup_{z \in Z'} \hat{\delta}(\delta(z, a), x) \end{aligned}$$

Inhaltlich ist das wie folgt zu interpretieren:

Die Menge der Zustände, die angenommen werden können, wenn man in einem Zustand aus $Z' \subseteq Z$ beginnt und der Automat das Wort w „liest“, ist $\hat{\delta}(Z', w)$.

Die akzeptierte Sprache eines NEA

Mit der Funktion $\hat{\delta}$ können wir nun formal definieren, dass der Automat M den Input $w \in \Sigma^*$ akzeptiert, wenn es eine Möglichkeit gibt, von einem der Startzustände (also aus S) durch Lesen des Wortes w in einen der Endzustände (aus E) zu gelangen.

Die vom NEA M akzeptierte Sprache ist

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset\}$$

Auf den folgenden Folien wollen wir ein paar Beispiel-NEAs betrachten, bevor wir den Satz von Rabin und Scott (NEAs und DEAs sind gleichmächtig) und schließlich auch die Äquivalenz der Automatenmodelle mit den Typ-3 Grammatiken abschließen.

Beispiel 1

Sei $M = (\{z_1, z_2, z_3, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{z_1, q_1\}, \{z_3, q_3\})$

$$\delta(z_1, a) = \{z_1\} \qquad \delta(z_1, b) = \{z_1, z_2\}$$

$$\delta(z_2, a) = \{z_3\} \qquad \delta(z_2, b) = \{\}$$

$$\delta(z_3, a) = \{\} \qquad \delta(z_3, b) = \{\}$$

$$\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\} \qquad \delta(q_1, b) = \{q_1\}$$

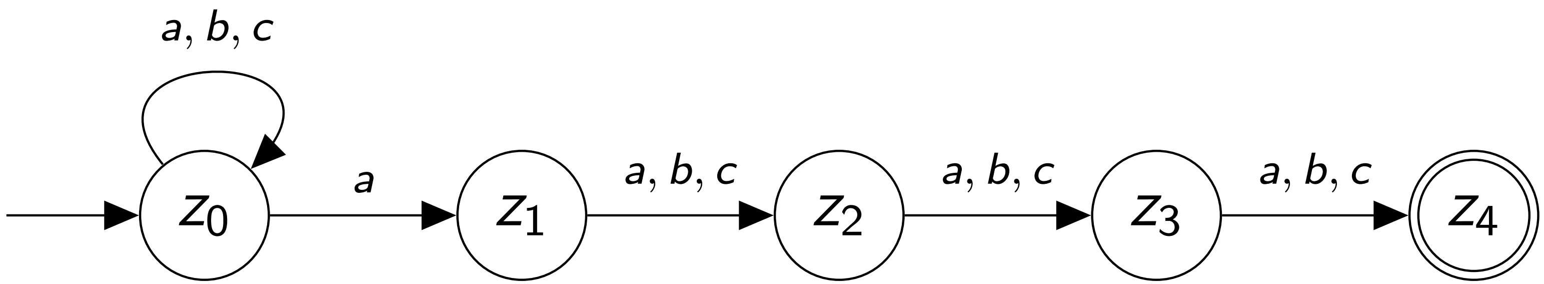
$$\delta(q_2, a) = \{\} \qquad \delta(q_2, b) = \{q_3\}$$

$$\delta(q_3, a) = \{\} \qquad \delta(q_3, b) = \{\}$$

Welche Sprache wird von diesem NEA akzeptiert?

Antwort: Alle Wörter aus $\{a, b\}^*$, die am Ende zwei verschiedene Zeichen haben, d.h. Wörter der Form wab oder wba mit $w \in \{a, b\}^*$.

Beispiel 2



Welche Sprache akzeptiert der hier abgebildete NEA?

Schreiben Sie diesen Automat als formales 5-Tupel auf!

Berechnen Sie $\hat{\delta}(\{z_0\}, w_i)$ für die folgenden Wörter:

$w_1 = abcbabcb$

$w_2 = abcbcbcb$

$w_3 = ababbabaa$

$w_4 = ababbbaaa$

Der Satz von Rabin und Scott

Informell ist die Aussage des Satzes, dass nichtdeterministische Automaten nicht mehr können als deterministische. Allerdings brauchen die nichtdeterministischen oft erheblich weniger Zustände als die gleichwertigen deterministischen. Diesen Aspekt werden wir später noch genauer beleuchten.

Satz: Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:

Wenn es einen NEA M gibt mit $L = T(M)$, dann gibt es auch einen DEA M' mit $L = T(M')$.

Anders ausgedrückt: Mit $\textbf{NEA} = \{T(M) \mid M \text{ ist ein NEA}\}$

und $\textbf{DEA} = \{T(M) \mid M \text{ ist ein DEA}\}$

gilt: $\textbf{NEA} \subseteq \textbf{DEA}$

Beweisidee

Schon zu Beginn der „Rechnung“ eines NEA können wir die möglichen Zustände als Menge notieren, in diesem Fall die Menge S der Startzustände.

Es liegt daher nahe, einen DEA so zu konstruieren, dass seine Zustände in Entsprechung zu Mengen von Zuständen des NEA stehen sollen.

Wir gehen von einem NEA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ aus.

Als DEA nehmen wir $M' = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta', S, E')$, wobei

$$\delta'(Q, a) = \hat{\delta}(Q, a) \qquad \text{für alle } Q \subseteq Z,\ a \in \Sigma$$
$$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$$

Der Satz von Rabin und Scott ist dann bewiesen, wenn wir zeigen, dass $T(M) = T(M')$ gilt.

Beweis: Details

Nach Definition gilt $w \in T(M) \iff \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset$ und $w \in T(M') \iff \hat{\delta}'(S, w) \in E' \iff \hat{\delta}'(S, w) \cap E \neq \emptyset$.

Es genügt also, die Gleichheit $\hat{\delta}(S, w) = \hat{\delta}'(S, w)$ zu zeigen.

Wir werden die allgemeinere Aussage $\hat{\delta}(Q, w) = \hat{\delta}'(Q, w)$ für alle $Q \subseteq Z$ und alle $w \in \Sigma^*$ beweisen, und zwar induktiv:

Induktionsanfang: $\hat{\delta}(Q, \varepsilon) = Q = \hat{\delta}'(Q, \varepsilon)$

Induktionsschritt: $\hat{\delta}(Q, ax) = \bigcup_{q \in Q} \hat{\delta}(\delta(q, a), x) = \hat{\delta}(\bigcup_{q \in Q} \delta(q, a), x)$

$$= \hat{\delta}(\hat{\delta}(Q, a), x) = \hat{\delta}(\delta'(Q, a), x) = \hat{\delta}'(\delta'(Q, a), x) = \hat{\delta}'(Q, ax)$$