Zum Beweis

Sei also $G = (V, \Sigma, P, S)$ die gegebene Typ-3 Grammatik.
Bilde einen NEA $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$ wie folgt:

(Hierbei setzen wir o.B.d.A. voraus, dass $\varepsilon \notin L(G)$ gilt.)

$Z = V \cup \{X\}$, wobei X ein neues Symbol ist, d.h. $X \notin V$

$S' = \{S\}$

$E = \{X\}$

Und für alle $a \in \Sigma$ und $A \in Z$:

Wenn $(A, a) \in P$: $\delta(A, a) = \{X\} \cup \{B \in Z \mid (A, aB) \in P\}$

Wenn $(A, a) \notin P$: $\delta(A, a) = \{B \in Z \mid (A, aB) \in P\}$

(Der Beweis, dass nun $L(G) = T(M)$ gilt, verläuft nach dem schon mehrfach durchgeführten Muster und bleibt daher den Teilnehmern zur Übung überlassen.)

Zusammenfassung

Wir hatten zuerst gezeigt, dass DEAs nur Typ-3 Sprachen akzeptieren. Der Satz von Rabin und Scott sagt uns, dass ein NEA nur solche Sprachen erkennen kann, die auch durch einen DEA akzeptiert werden können. Schließlich haben wir gezeigt, dass jede Typ-3 Sprache durch einen NEA erkannt wird.
Diese drei Ergebnisse können wir so zusammenfassen:

$$\textbf{DEA} = \textbf{NEA} = \textbf{REG} \quad (= \textbf{Typ-3})$$

Beachte hierbei: Mit **DEA, NEA, REG** und **Typ-3** sind die zu den jeweiligen Modellen gehörenden Sprachklassen gemeint.

Zwei Bemerkungen zum Schluss

Man könnte sich fragen, ob eine Typ-3 Sprache inhärent mehrdeutig sein kann (im Sinn von Einheit 7).

Die Antwort lautet: NEIN.

Denn für jede Typ-3 Sprache gibt es einen DEA, den man nach der Technik von Folie 9.1 in eine eindeutige Grammatik umwandeln kann.

Mit DEA, NEA und Typ-3 Grammatiken haben wir nun schon drei verschiedene Formalismen, die alle die selbe Sprachklasse charakterisieren. In den nächsten Vorlesungen werden wir noch weitere gleichwertige Formalismen kennenlernen: zuerst die *regulären Ausdrücke*.

Reguläre Ausdrücke

Wir führen *reguläre Ausdrücke* als weiteres Beschreibungsmittel für die regulären Sprachen ein. Zunächst wollen wir festlegen, wie reguläre Ausdrücke aussehen - d.h. wir definieren eine *Syntax*:

- $\emptyset$ und ε sind reguläre Ausdrücke.
- a ist ein regulärer Ausdruck (für jedes $a \in \Sigma$).
- Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke.

Hier folgen einige Beispiele für reguläre Ausdrücke über $\{a, b\}$:

$((aba)^*|a)ba$ $\qquad$ $baba\,(a)^*\,baba$ $\qquad$ $(\emptyset\,|\,\varepsilon)^*$

Ist $(a|b|ab)$ ein syntaktisch korrekter regulärer Ausdruck?

Streng genommen nicht!

Semantik regulärer Ausdrücke

Wir werden jetzt jedem regulären Ausdruck eine Bedeutung geben, d.h. wir definieren die *Semantik* regulärer Ausdrücke. Dabei folgen wir der induktiven Definition und ordnen jedem Ausdruck γ eine Sprache $L(\gamma) \subseteq \Sigma^*$ zu:

- $L(\emptyset) = \emptyset$ und $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$.
- $L(a) = \{a\}$ (für jedes $a \in \Sigma$).
- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$, $L((\alpha|\beta)) = L(\alpha) \cup L(\beta)$,
$$L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*.$$

Jedes Wort $w \in \Sigma^*$ ist ein regulärer Ausdruck und erfüllt die Gleichung $L(w) = \{w\}$. Können Sie das beweisen?

Daraus kann man schließen, dass jede endliche Teilmenge von Σ^* durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden kann. Wie?

Der Satz von Kleene

Der Satz von Kleene sagt aus, dass reguläre Ausdrücke dieselbe Klasse von Sprachen beschreiben wie Typ-3 Grammatiken.

Satz (Kleene):

Es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$ genau dann, wenn L eine Typ-3 Sprache ist.

Beweis: Wir wollen zunächst zeigen, dass alle durch reguläre Ausdrücke beschreibbaren Sprachen Typ-3 Sprachen sind.

Für die Sprachen $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ und $L(a) = \{a\}$ ist das klar.

Nun nehmen wir an, dass $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ Typ-3 Sprachen sind (Induktionsvorauss.) und zeigen, dass dann die Sprachen $L(\alpha\beta)$, $L((\alpha|\beta))$ und $L((\alpha)^*)$ Typ-3 Sprachen sind.