Zum Beweis, 1. Richtung

Für die Sprachen $L(\alpha\beta)$ und $L((\alpha|\beta))$ gehen wir von zwei Typ-3 Grammatiken $G_i = (V_i, \Sigma, P_i, S_i)$ für $i = 1, 2$ aus.
Dabei sei $L(G_1) = L(\alpha)$ und $L(G_2) = L(\beta)$, und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Die Sprache $L(\alpha\beta)$ wird erzeugt durch die Grammatik $G = (V_1 \cup V_2, \Sigma, P, S_1)$, wobei P so gebildet ist:

$$P = \{(A, aB) \mid (A, aB) \in P_1\} \cup \{(A, aS_2) \mid (A, a) \in P_1\} \cup P_2$$

Man sieht leicht ein, dass unter der Voraussetzung $\varepsilon \notin L(\alpha)$ die Grammatik G die Sprache $L(\alpha\beta)$ erzeugt. Die Modifikation für den Fall $\varepsilon \in L(\alpha)$ liegt auf der Hand.

Für $L((\alpha|\beta))$ nehmen wir die neue Variable S dazu und bilden P':

$$P' = P_1 \cup P_2 \cup \{(S, u) \mid (S_1, u) \in P_1 \vee (S_2, u) \in P_2\}$$

Den Fall $L((\alpha)^*)$ bitte selbst überlegen...

Rückrichtung

Jetzt ist noch zu zeigen, dass für jede Typ-3 Sprache L ein regulärer Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$ existiert.

Sei also $M = (Z, \Sigma, \delta, z_1, E)$ ein DEA. Wir wollen einen regulären Ausdruck γ konstruieren mit $L(\gamma) = T(M)$.

Nummeriere die Zustände durch, d.h. $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ definieren wir die Sprachen $R^k_{i,j}$ wie folgt:

$R^k_{i,j}$ enthält alle Wörter $x \in \Sigma^*$ mit $\hat{\delta}(z_i, x) = z_j$, wobei für alle „Zwischenzustände" z_m die Ungleichung $m \leq k$ gilt.

Ein Zwischenzustand ist ein Zustand, der bei der Arbeit von M auf x, gestartet im Zustand z_i nach dem ersten, aber vor dem letzten Schritt angenommen wird.

Nun zeigen wir, dass es für jedes $R^k_{i,j}$ einen regulären Ausdruck gibt.

Abschluss des Beweises

Für $k = 0$ sind die Sprachen $R^0_{i,j}$ einfache endliche Sprachen, und daher leicht durch reguläre Ausdrücke zu beschreiben.

Nun seien für alle $R^k_{i,j}$ bereits reguläre Ausdrücke $\alpha^k_{i,j}$ gegeben.

Wir zeigen: Die $R^{k+1}_{i,j}$ sind auch durch reg. Ausdrücke beschreibbar.

Es gilt:
$$R^{k+1}_{i,j} = R^k_{i,j} \cup R^k_{i,k+1}(R^k_{k+1,k+1})^* R^k_{k+1,j}$$

und folglich für die entsprechenden regulären Ausdrücke:
$$\alpha^{k+1}_{i,j} = (\alpha^k_{i,j} \,|\, \alpha^k_{i,k+1}(\alpha^k_{k+1,k+1})^* \alpha^k_{k+1,j})$$

$T(M)$ lässt sich als Vereinigung von gewissen $R^n_{1,j}$ schreiben.

Also ist der reguläre Ausdruck für $T(M)$ von der Form
$$(\alpha^n_{1,j_1} \,|\, \alpha^n_{1,j_2} \,|\, \ldots \,|\, \alpha^n_{1,j_m})$$
für passende Werte $j_1, \ldots, j_m$.

Das Pumping Lemma

Bisher haben wir eine Reihe von Charakterisierungen der Typ-3 Sprachen kennengelernt. Das erfüllt mehrere Zwecke:

Wenn wir von einer Sprache zeigen wollen, dass sie vom Typ-3 ist, dann haben wir viele Formalismen zur Auswahl und können uns den heraussuchen, in dem wir am einfachsten zu dem gewünschten Ergebnis kommen.

Gleichzeitig haben wir auch eine willkommene Wahlmöglichkeit, wenn es darum geht, allgemeine Sachverhalte abstrakt für alle Typ-3 Sprachen zu beweisen! (Vgl. z.B. Einheit 11)

Aber was können wir tun, wenn wir nachweisen sollen, dass eine gegebene Sprache NICHT vom Typ-3 ist?
Auf diese Problematik zielt das Pumping-Lemma ab...

Der Satz

Der folgende Satz hat sehr viele Namen (manche mehr, manche weniger gebräuchlich...): Pumping Lemma, Iterationslemma, *uvw*-Theorem, Lemma von Bar-Hillel, Schleifenlemma

Satz: Für jede Typ-3 Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, für das jedes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq n$ so in drei Teile $x = uvw$ zerlegt werden kann, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $|v| \geq 1$
2. $|uv| \leq n$
3. $uv^iw \in L$ für alle $i \geq 0$

Beweis (Teil 1)

Es sei L eine beliebige Typ-3 Sprache. Dann existiert ein DEA M mit $L = T(M)$. Die Zustandsmenge von M sei Z, Startzustand z_0, Endzustandsmenge E. Nun setzen wir $n = |Z|$ und zeigen, dass mit dieser Wahl von n jedes Wort aus L, das mindestens die Länge n hat, in der geforderten Weise zerlegt werden kann.

Sei $x \in L$ mit $|x| \geq n$. Dann können wir x so schreiben:

$$x = x_1 x_2 \ldots x_n y$$

wobei $x_i \in \Sigma$ für alle i, und $y \in \Sigma^*$.

Betrachte folgende Teilmenge von Z:

$$Q = \{\hat{\delta}(z_0, x_1 \ldots, x_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$$

Wegen $Q \subseteq Z$ und $|Z| = n$ gilt $|Q| \leq n$.

Beweis (Teil 2)

Also existieren i, j mit $0 \leq i < j \leq n$ so, dass

$$\hat{\delta}(z_0, x_1 \dots x_i) = \hat{\delta}(z_0, x_1 \dots x_j)$$

Wir setzen $u = x_1 \dots x_i$, $v = x_{i+1} \dots x_j$ und $w = x_{j+1} \dots x_n y$.

Dann ist offenbar $x = uvw$, $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$. Nun muss also nur noch gezeigt werden, dass Bedingung 3 ebenfalls erfüllt ist.

Setze $p = \hat{\delta}(z_0, u)$ und $q = \hat{\delta}(z_0, x)$. Dann ist $q \in E$ und es gilt $\hat{\delta}(p, v) = p$ und $\hat{\delta}(p, w) = q$, und induktiv auch $\hat{\delta}(p, v^i w) = q$ für alle $i \geq 0$. Schließlich folgt

$$\hat{\delta}(z_0, uv^i w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, u), v^i w) = \hat{\delta}(p, v^i w) = q.$$

Also ist $uv^i w \in L$, wie zu beweisen war.