Beweis, Abschluss

Zur Wohldefiniertheit von δ zeigen wir indirekt, dass aus $[x] = [y]$ folgt $[xa] = [ya]$:

Wäre $[xa] \neq [ya]$, dann gäbe es ein $w' \in \Sigma^*$ mit $xaw' \in L \iff yaw' \notin L$, also $xw \in L \iff yw \notin L$ für $w = aw'$.

Die Wohldefiniertheit von E kann man ähnlich nachweisen.
Zu zeigen ist: $[x] = [y] \implies (x \in L \Leftrightarrow y \in L)$:

Aber $[x] = [y]$ bedeutet, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt, dass $xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$, mit $w = \varepsilon$ erhält man also $x \in L \Leftrightarrow y \in L$.

Es fehlt noch der Nachweis, dass $T(M) = L$ gilt:

$$w \in T(M) \iff \hat{\delta}(z_0, w) \in E \iff [w] \in E \iff w \in L$$

Hierbei wurde die Gleichheit $\hat{\delta}(z_0, w) = [w]$ benutzt, die man leicht mit Induktion über die Länge von w nachprüfen kann.

Beispiele

1. Noch einmal unäre Quadratzahlen $L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$:

   Beh.: Für zwei verschiedene Quadratzahlen r und s gilt $[a^r] \neq [a^s]$.
   Denn aus $m^2 = r < s = n^2$ folgt mit $w = a^{2m+1}$, dass $a^r w \in L$, aber $a^s w \notin L$, d.h. R_L hat unendlichen Index.

2. $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ enthält } abb \text{ als Teilstring}\}$

   Beh.: R_L hat Index 4, die vier Klassen sind $[\varepsilon]$, $[a]$, $[ab]$, $[abb]$.
   Bitte überprüfen!

3. $L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid |x|_a - |x|_b \equiv 3 \bmod 5\}$

   Beh.: R_L hat Index 5, die Klassen: $[\varepsilon]$, $[a]$, $[aa]$, $[aaa]$ und $[aaaa]$.
   Denn x und y liegen genau dann in der selben Klasse (also $[x] = [y]$), wenn $|x|_a - |x|_b \equiv |y|_a - |y|_b \bmod 5$.

Minimalität des Myhill-Nerode Automaten

Wir wollen zeigen, dass der im Beweis zum Myhill-Nerode Satz konstruierte DEA für die reguläre Sprache L immer der DEA mit den wenigsten Zuständen für L ist.

Sei M_0 der konstruierte Automat, seine Zustandsanzahl ist genau der Index von R_L. Sei M ein beliebiger Automat für L ohne nicht erreichbare Zustände. Seine Zustandszahl ist der Index von R_M.

Aber R_M verfeinert R_L, und beide haben endlichen Index. Also ist entweder die Zustandszahl von M größer als die von M', oder R_M und R_L sind identische Äquivalenzrelationen.

Wir fassen zusammen:

Entweder hat M mehr Zustände als M_0, oder M und M_0 sind isomorphe Automaten. In anderen Worten:

M_0 ist der *eindeutig bestimmte* minimale DEA für L.

Minimalität bei NEAs

Man kann sich an geeigneten Beispielen sehr schnell klar machen, dass es den eindeutig bestimmten minimalen NEA für gegebene reguläre Sprache im allgemeinen nicht gibt.

Betrachte etwa die Sprache $\{wa \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Die Myhill-Nerode Äquivalenzrelation für diese Sprache hat den Index 2. Das heißt, es gibt einen DEA mit 2 Zuständen für diese Sprache.

Man kann sich aber sehr einfach einen zweiten (nichtdeterministischen) Automaten für diese Sprache überlegen, der auch genau zwei Zustände hat.

Bitte konstruieren Sie einen.

Da es offensichtlich keinen NEA mit weniger als zwei Zuständen für diese Sprache gibt, ist die obige Behauptung damit bewiesen.

Konstruktion des Minimalautomaten

Wir wollen einen Algorithmus entwickeln, der **direkt** aus einem gegebenen DEA M den Minimalautomat M_0 berechnet. Dabei gehen wir von einem DEA ohne unerreichbare Zustände aus.

(Gegebenenfalls müssen die nicht erreichbaren Zustände in einem Vorlauf ermittelt und eliminiert werden.)

Wir hatten ja gesehen, dass die Relation R_M eine Verfeinerung von R_L ist. Das heißt, die Klassen bzgl. R_L enthalten unter Umständen mehrere Klassen von R_M. In diesem Fall können wir die Zustände, die zu diesen Klassen gehören, miteinander *indentifizieren*, d.h. die Zustände werden **verschmolzen**.

Algorithmisch setzen wir das so um, dass wir sukzessive ermitteln, welche Zustände NICHT verschmolzen werden dürfen, weil es Wörter gibt, die von dem einen in einen Endzustand führen, von dem anderen aber nicht.

Algorithmus Minimalautomat

Wir arbeiten mit einer Tabelle, in der für jedes Paar (p, q) von Zuständen eine Markierung gesetzt werden kann.

Initial werden Paare (p, q) genau dann markiert, wenn einer der beiden Zustände p, q in E ist, der andere nicht.

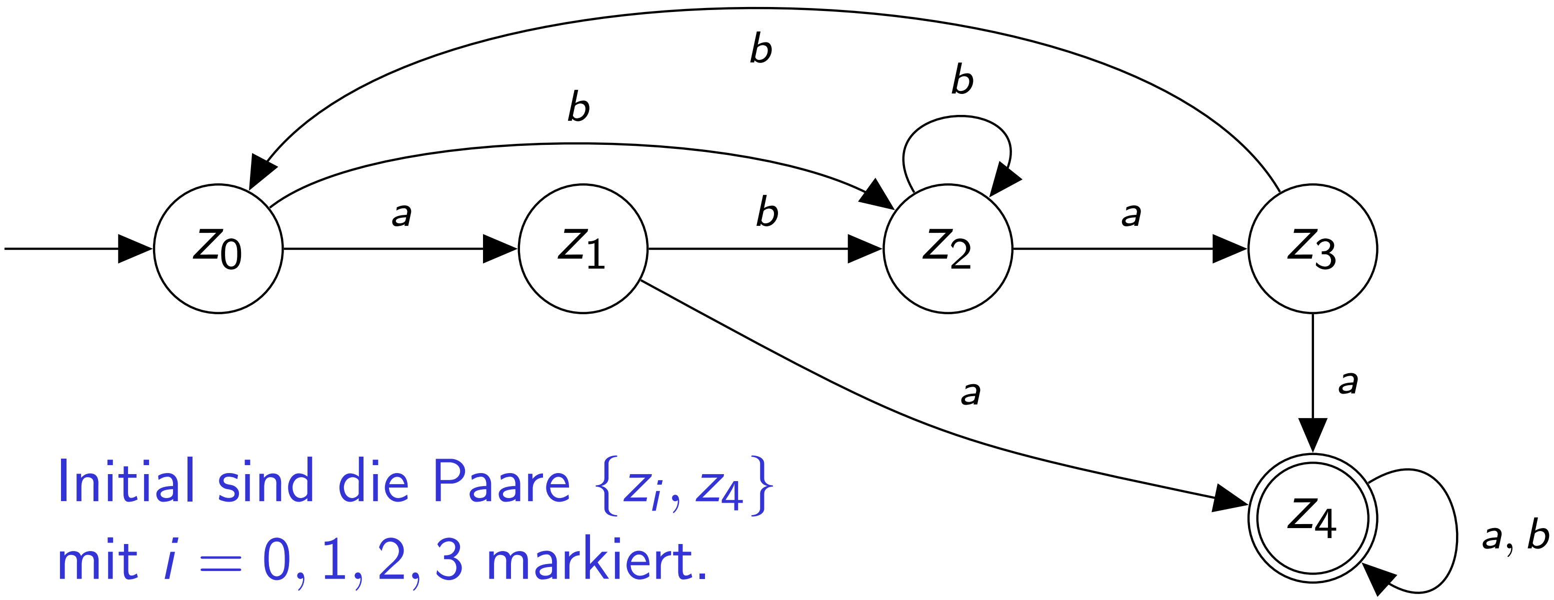
Für diese Paare genügt schon das leere Wort, um nachzuweisen, dass sie auf keinen Fall verschmolzen werden dürfen.

Nun werden in einer Schleife immer wieder alle bisher unmarkierten Paare (p, q) gesucht, für die ein $a \in \Sigma$ existiert, so dass das Paar $(\delta(p, a), \delta(q, a))$ schon markiert ist. Alle solchen Paare werden jetzt auch markiert.

Der Algorithmus endet, wenn keine neuen Markierungen mehr möglich sind. Unmarkierte Zustandspaare werden verschmolzen.

Der entstehende Automat ist der Myhill-Nerode Minimalautomat.

Beispiel



Initial sind die Paare $\{z_i, z_4\}$
mit $i = 0, 1, 2, 3$ markiert.

	z_0	z_1	z_2	z_3
z_1	M			
z_2		M		
z_3	M		M	
z_4	M	M	M	M

Dann wird (z_0, z_1) markiert. (Warum?)
Und auch (z_0, z_3) wird markiert.
Weiterhin (z_1, z_2) und (z_2, z_3).

Es verbleiben (z_0, z_2) und (z_1, z_3).