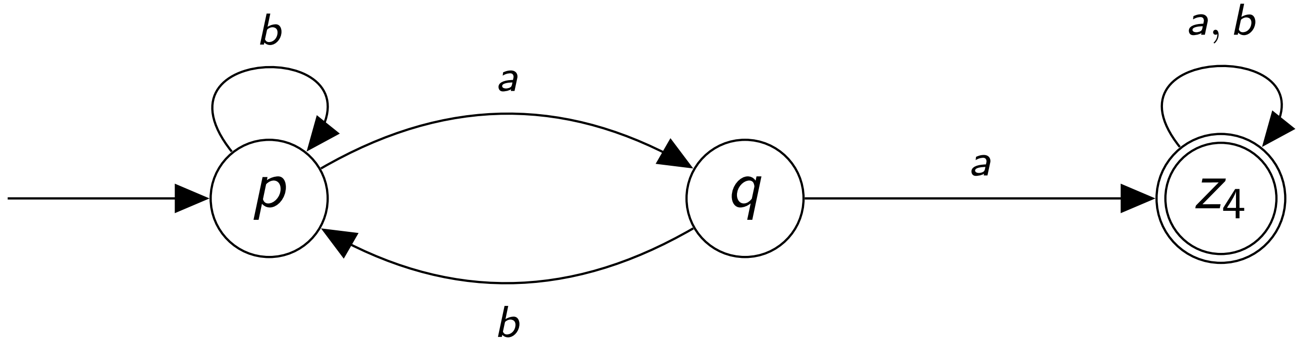
Ergebnis

Wie sieht der resultierende Automat aus?

Er hat drei Zustände $p = \{z_0, z_2\}$, $q = \{z_1, z_3\}$ und z_4.



Frage: Welche Sprache akzeptiert dieser Automat?

Antwort:

$$\{xaay \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$$

Einschub: Erkennung durch Monoide

Achtung: Diese Einheit finden Sie NICHT im Buch von Schöning.

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine formale Sprache und M ein Monoid.

Wir sagen M erkennt L, wenn eine Teilmenge $A \subseteq M$ und ein Homomorphismus $\varphi : \Sigma^* \to M$ existieren, so dass gilt:

$$L = \varphi^{-1}(A) \qquad \text{(d.h.} \quad w \in L \iff \varphi(w) \in A)$$

Eine alternative Definition ist:

M erkennt L, wenn ein Homomorphismus $\varphi : \Sigma^* \to M$ existiert, so dass gilt:

$$L = \varphi^{-1}(\varphi(L)) \qquad \text{(d.h.} \quad w \in L \iff \varphi(w) \in \varphi(L))$$

Zur Äquivalenz der Erkennbarkeitsdefinitionen

Wir zeigen jetzt, dass die beiden Definitionen der Erkennbarkeit auf der vorherigen Folie tatsächlich äquivalent sind:

Es sei $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$. Wähle $A = \varphi(L)$. Dann ist $L = \varphi^{-1}(A)$. Also folgt die erste Definition aus der zweiten.

Sei $L = \varphi^{-1}(A)$. Dann erhalten wir

$$\varphi(L) = \varphi(\varphi^{-1}(A)) \subseteq A$$

und folglich

$$\varphi^{-1}(\varphi(L)) \subseteq \varphi^{-1}(A) = L,$$

also $\varphi^{-1}(\varphi(L)) \subseteq L$; dass umgekehrt $L \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(L))$ gilt, ist klar.

Damit ist der Beweis komplett.

Noch eine Äquivalenzrelation

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt erkennbar, wenn sie von einem *endlichen* Monoid erkannt wird.

Wir fixieren jetzt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und definieren weiter:

$w_1, w_2 \in \Sigma^*$ sind *äquivalent*, wenn folgendes gilt:

$$\forall x, y \in \Sigma^* : \quad xw_1y \in L \iff xw_2y \in L.$$

Offenbar ist auch diese Relation eine Verfeinerung der Myhill-Nerode-Äquivalenz.

Diese Äquivalenz notieren wir mit dem Symbol $\equiv_L$ oder einfach $\equiv$.
Dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, sollte klar sein.
Wir behaupten nun aber, dass $\equiv_L$ sogar eine *Kongruenz* darstellt, das heißt zusätzlich gilt:

$$[w_1 \equiv z_1 \text{ und } w_2 \equiv z_2] \implies w_1 w_2 \equiv z_1 z_2.$$

Können Sie das beweisen?

Das syntaktische Monoid

Die eben eingeführte Kongruenz heißt *syntaktische Kongruenz*. Bezüglich einer Kongruenz kann man zu einem Monoid immer ein sogenanntes *Quotientenmonoid* definieren, dessen Elemente die Äquivalenzklassen der Kongruenz sind. Wegen der Kongruenz-Eigenschaft ist die Verknüpfung solcher Klassen in der natürlichen Weise eine wohldefinierte Operation.

Das Quotientenmonoid bezüglich der syntaktischen Kongruenz wird mit $\Sigma^*/\equiv_L$ notiert. Wir nennen es das

syntaktische Monoid $\quad (Synt(L))$

der Sprache L und behaupten, dass für jede Sprache L gilt, dass das syntaktische Monoid von L die Sprache L erkennt, und zwar mit dem Homomorphismus $\varphi: \ w \mapsto [w]$.

$L \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(L))$ ist trivial. Die Rückrichtung ist aber auch nicht so schwer:
Sei $v \in \varphi^{-1}(\varphi(L))$, d.h. $\varphi(v) \in \varphi(L)$, also $\varphi(v) = \varphi(w)$ für ein $w \in L$.
Damit ist $v \equiv_L w$ und folglich $v \in L$, weil ja $w \in L$ gilt.

Syntaktisches Monoid und Typ-3

Der folgende Satz klärt den Zusammenhang zwischen Typ-3, Erkennbarkeit und syntaktischem Monoid:

Satz: Für jede formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

a) L ist regulär.

b) L ist erkennbar.

c) $Synt(L)$ ist endlich.

Den Beweis werden wir auf den nächsten zwei Folien über die Implikationen c) $\Longrightarrow$ a), a) $\Longrightarrow$ b) und b) $\Longrightarrow$ c) erbringen.

Beweis c) $\Longrightarrow$ a) und a) $\Longrightarrow$ b)

c) $\Longrightarrow$ a):

Das syntaktische Monoid von L sei endlich, d.h. die syntaktische Kongruenz hat nur endliche viele Klassen. Die Myhill-Nerode Äquivalenz R_L wird durch die syntaktische Kongruenz verfeinert, hat also selbst höchstens so viele Klassen wie $\equiv_L$. Damit ist der Index von R_L endlich und nach dem Satz von Myhill-Nerode ist L regulär.

a) $\Longrightarrow$ b):

M sei ein DEA mit $T(M) = L$, seine Zustandsmenge sei Z. Jedes Wort $w \in \Sigma^*$ erzeugt eine Transformation $t_w : Z \to Z$ vermöge der Definition $t_w(z) = \hat{\delta}(z, w)$. Die Menge aller Transformationen $Z \to Z$ bildet ein endliches Monoid X und $\varphi : \Sigma^* \to X$ mit $\varphi(w) = t_w$ ist offenbar ein Homomorphismus, der die Bedingung $\varphi^{-1}(\varphi(L)) = L$ erfüllt.