Beweis b) $\Longrightarrow$ c)

b) $\Longrightarrow$ c):

Nun sei L erkennbar, d.h. es gibt ein endliches Monoid und einen Homomorphismus φ von Σ^* in dieses Monoid, so dass die Gleichheit $\varphi^{-1}(\varphi(L)) = L$ gilt. Wir müssen zeigen, dass das syntaktische Monoid von L endlich ist.

Seien w_1 und w_2 zwei Wörter aus Σ^* mit $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$, und sei darüberhinaus $w_1 \not\equiv_L w_2$. Es gibt also Wörter x und y mit $xw_1y \in L$ und $xw_2y \notin L$ (oder umgekehrt). Dann folgt $\varphi(xw_1y) = \varphi(x)\varphi(w_1)\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(w_2)\varphi(y) = \varphi(xw_2y)$ und daher $xw_2y \in \varphi^{-1}(\varphi(xw_1y)) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(L)) = L$.

Das ist ein Widerspruch, also muss für Wörter w_1 und w_2 mit $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$ immer $w_1 \equiv_L w_2$ gelten. In anderen Worten: Die durch φ gegebene Äquivalenzrelation verfeinert $\equiv_L$. Da $\varphi(\Sigma^*)$ endlich ist, hat also auch $Synt(L)$ endlich viele Elemente.

Abschlusseigenschaften

Die Klasse der regulären Sprachen hat eine große Zahl nützlicher Eigenschaften, insbesondere die folgenden *Abschlusseigenschaften:*

Satz: Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter allen booleschen Operationen, d.h. insbesondere unter Vereinigung, Schnitt und Komplement.
Außerdem ist sie abgeschlossen unter Produkt (= Konkatenation), sowie unter der Sternoperation (und unter vielen weiteren Operationen).

Beweis: Da jede boolesche Operation mit den zwei Operationen Vereinigung und Komplement darstellbar ist, genügt es den Abschluss unter diesen beiden Operationen nachzuweisen.

Beweis der Abschlusseigenschaften

Den Abschluss unter Vereinigung erhält man unmittelbar aus der Darstellung mit regulären Ausdrücken: Gilt $L_1 = L(\alpha)$ und $L_2 = L(\beta)$, dann ist $L_1 \cup L_2 = L((\alpha|\beta))$, also wieder regulär.

Der Abschluss unter Komplement folgt aus der Darstellung mit DEAs: Wenn $L = T(M)$ für $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ist, dann ist $\overline{L} = T(M')$ mit $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$.

Den Abschluss unter Konkatenation erhält man wieder aus der Darstellung mit regulären Ausdrücken: Gilt $L_1 = L(\alpha)$ und $L_2 = L(\beta)$, dann ist $L_1 L_2 = L(\alpha\beta)$, also wieder regulär.

Und auch den Abschluss gegen die Sternoperation sehen wir am besten bei den regulären Ausdrücken: Wenn $L = L(\alpha)$ gilt, ist $(\alpha)^*$ ein regulärer Ausdruck für L^*.

Entscheidbarkeitsresultate

Wir beginnen mit dem bekannten *Wortproblem.* Gleich zu Beginn des Semesters hatten wir gezeigt, dass das Wortproblem für Typ-1 Sprachen entscheidbar ist. Da Typ-3 eine Teilklasse von Typ-1 ist, überträgt sich dieses Ergebnis. Allerdings ist der dort angegebene Algorithmus sehr aufwändig – bei Typ-3 geht es viel einfacher, wenn man einen DEA benutzt, nämlich in *Echtzeit!*

Als zweites Resultat wollen wir hier zeigen, dass *Leerheit* auch ein entscheidbares Problem (für Typ-3 Sprachen) ist.

Das Leerheitsproblem besteht darin, bei gegebener Sprache L zu entscheiden, ob $L = \emptyset$ gilt.

1. Lösung: Prüfe Erreichbarkeit im Graph des endlichen Automaten.

2. Lösung: Prüfe, ob es ein Wort gibt, das kürzer als die Pumping-Konstante n ist. (Muss existieren, wenn $L \neq \emptyset$.)

Endlichkeit

Das Endlichkeitsproblem besteht darin, bei gegebener Sprache L zu entscheiden, ob $|L| < \infty$. Endlichkeit ist entscheidbar!

1. Lösung: Suche im Graph des endlichen Automaten nach einem Zyklus, der von z_0 aus erreichbar ist und von dem aus ein akzeptierender Endzustand erreichbar ist.

2. Lösung: Prüfe, ob es in L ein Wort der Länge mindestens n und höchstens $2n-1$ gibt ($n =$ Konstante aus dem Pumping Lemma). Wenn ja, ist L unendlich – denn man kann dieses Wort „pumpen“, andernfalls ist L endlich (denn dann sind alle $w \in L$ kürzer als n).

Warum ist das so?

Weil sonst ein kürzestes Wort x mit $|x| \geq 2n$ existieren müsste. Dieses könnte gepumpt werden, d.h. insbesondere wäre $x = uvw$ und $uw \in L$. Wegen $|uw| \geq n$ wäre dann $|uw| \geq 2n$ und $|uw| < |x|$ – Widerspruch.

Schnitt- und Äquivalenzproblem

Das Schnittproblem besteht in der Frage, ob der Schnitt zweier gegebener regulärer Sprachen L_1 und L_2 leer ist. Dabei können die Sprachen durch DEAs oder Typ-3 Grammatiken, oder auch durch reguläre Ausdrücke gegeben sein.

In jedem Fall können wir auf Grund der Abschlusseigenschaften eine entsprechende Beschreibung von $L_1 \cap L_2$ berechnen, sodass für diese Sprache nur noch die Leerheit zu testen ist.

Also ist das Schnittproblem für Typ-3 Sprachen entscheidbar.

Das Äquivalenzproblem besteht in der Frage, ob zwei gegebene reguläre Sprachen L_1 und L_2 gleich sind. Auch hier helfen uns die Abschlusseigenschaften und das Leerheitsproblem, denn es gilt

$$L_1 = L_2 \iff (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1}) = \emptyset.$$

Alternativlösung: Man könnte auch Minimalautomaten auf Isomorphie testen...

Abschließende Bemerkungen

Im Normalfall geht es bei der Entscheidbarkeitsfrage nur um die *prinzipielle Machbarkeit.*

Manchmal kann es aber auch entscheidend sein, wie effizient eine Berechnung (oder Entscheidung) durchgeführt werden kann.

Beim Wortproblem haben wir schon gesehen, dass man unter Ausnutzung der speziellen Typ-3 Eigenschaft mit einem DEA wesentlich effizienter arbeitet als es uns im allgemeineren Fall der Typ-1 Sprachen gelungen ist.

Zwar können wir jede der eingeführten Darstellungsarten (DEA, NEA, Typ-3 Grammatik, regulärer Ausdruck) in jede andere umrechnen, aber der Aufwand hierfür ist mitunter ganz erheblich. Daher ist die Komplexität z.B. des Äquivalenzproblems unter Umständen sehr stark von der verwendeten Darstellung der behandelten Sprache abhängig.