Beweis (3)

Wir lesen aus dem Bild der vorigen Folie ab, dass folgende Ableitungen existieren:

$$S \Rightarrow^* uAy \qquad A \Rightarrow^* vAx \qquad A \Rightarrow^* w$$

Außerdem ist klar, dass der Teilbaum unter dem roten A maximal $2^{|V|}$ viele Blätter haben kann (da sein längster Pfad durch $|V|$ beschränkt ist). Also gilt $|vwx| \leq n$, d.h. Bedingung 2) ist erfüllt.

Bedingung 1) ist auch erfüllt, denn wenn das blaue A im linken Teilbaum unterhalb des roten A's liegt, dann führen alle Blätter des rechten Teilbaums zu Buchstaben in x – dieses kann also nicht das leere Wort sein. Wenn andererseits das blaue A im rechten Teilbaum liegt, kann ebenso (symmetrisch) v nicht das leere Wort sein.

Beweis, Abschluss

Nun müssen wir nur noch zeigen, dass auch die Bedingung 3) erfüllt ist. Dazu benutzen wir die drei Ableitungen

$$S \Rightarrow^* uAy \qquad A \Rightarrow^* vAx \qquad A \Rightarrow^* w$$

und zeigen per Induktion: $S \Rightarrow^* uv^iAx^iy$ für alle i.

Induktionsanfang ist die erste Ableitung oben ($i = 0$).

Für den Induktionsschritt benutzen wir, dass schon $S \Rightarrow^* uv^iAx^iy$ gilt. Zusammen mit $A \Rightarrow^* vAx$ erhalten wir $S \Rightarrow^* uv^{i+1}Ax^{i+1}y$.

Nun brauchen wir nur noch die Ableitung $A \Rightarrow^* w$ benutzen, um aus uv^iAx^iy schließlich uv^iwx^iy zu machen, insgesamt also

$S \Rightarrow^* uv^iwx^iy$ und damit $uv^iwx^iy \in L$.

Bitte schauen Sie sich hierzu auch die aussagekräftigen Bilder im Buch an!

Erstes Beispiel

Für die folgende Sprache haben wir schon nachgewiesen, dass sie eine Typ-1 Sprache ist. Jetzt werden wir zeigen, dass sie KEINE Typ-2 Sprache ist, womit dann bewiesen wäre, dass die Typ-2 Sprachen eine echte Teilklasse der Typ-1 Sprachen darstellen.

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

Wie bei den Anwendungen des Pumping Lemmas für Typ-3 werden wir auch hier im Normalfall einen Widerspruchsbeweis entwickeln.

Wir nehmen also an, dass L eine Typ-2 Sprache wäre. Dann gäbe es nach dem Pumping Lemma eine Zahl n, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ hätte, die die drei Bedingungen 1) bis 3) erfüllt.

Daraus werden wir einen Widerspruch herleiten.

Erstes Beispiel, Fortsetzung

Wir wählen $z = a^n b^n c^n$ mit dem n aus dem Pumping Lemma.

Damit gilt $|z| = 3n \geq n$, und folglich könnte z in fünf Teile $z = uvwxy$ zerlegt werden, wobei v und x nicht beide leer sein dürfen, vwx höchstens die Länge n hat, und $uv^i wx^i y \in L$ gilt für alle $i \geq 0$.

Da für $i = 2$ also $uv^2 wx^2 y$ in L sein muss, können v und x jeweils höchstens einen der Buchstaben a, b und c enthalten.

Aber damit gibt es mindestens einen Buchstaben, der in $uv^2 wx^2 y$ genau n mal vorkommt, während die Länge dieses Worts größer als $3n$ ist. Das Wort $uv^2 wx^2 y$ kann also in L nicht vorkommen.

Das ist ein Widerspruch zu Bedingung 3)! Damit sind wir fertig.

Zweites Beispiel

Die folgende Sprache sieht etwas komplizierter aus:

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i > j > k \text{ und } k < i - 7\}$$

Wir behaupten auch hier, dass L keine Typ-2 Sprache ist, und weisen das indirekt nach, indem wir zunächst annehmen, L wäre kontextfrei. Dann könnten wir wieder die Konstante n aus dem Pumping Lemma hernehmen für die Bildung eines Wortes z der Länge mindestens n, das dann eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit den Eigenschaften 1) bis 3) zulassen müsste.

Wir wählen das Wort

$$z = a^{n+9} b^{n+8} c^{n+1}$$

In einer Zerlegung gemäß Pumping Lemma würde vwx aus höchstens n Zeichen bestehen, könnte also niemals a's und c's enthalten. Außerdem können v und x jeweils nur maximal einen Buchstaben wirklich enthalten (wie im ersten Beispiel!).

Zweites Beispiel, Fortsetzung

Nun unterscheiden wir die 5 möglichen Fälle:

1) vx besteht nur aus a's, etwa $vx = a^m$ mit $m \geq 1$.
   Dann ist $uwy = a^i b^{n+8} c^{n+1}$ mit $i = n + 9 - m$, also $uwy \notin L$.

2) vx besteht nur aus b's, etwa $vx = b^m$ mit $m \geq 1$.
   Dann ist $uv^2wx^2y = a^{n+9} b^j c^{n+1}$ mit $j = n + 8 + m$, also $uv^2wx^2y \notin L$.

3) vx besteht nur aus c's, etwa $vx = c^m$ mit $m \geq 1$.
   Dann ist $uv^2wx^2y = a^{n+9} b^{n+8} c^k$ mit $k = n + 1 + m$, also $uv^2wx^2y \notin L$.

4) v besteht nur aus a's und x nur aus b's.
   Dann ist $uwy = a^i b^j c^{n+1}$ mit $i < n + 9$, also $uwy \notin L$.

5) v besteht nur aus b's und x nur aus c's.
   Dann ist $uv^2wx^2y = a^{n+9} b^j c^k$ mit $k > n + 1$, also $uv^2wx^2y \notin L$.

Drittes Beispiel

Wir nehmen noch einmal die Sprache der unären Quadratzahlen:

$$L = \{a^m \mid m \text{ ist Quadratzahl}\}$$

Wäre diese Sprache kontextfrei, dann gäbe es nach dem Pumping Lemma eine Zahl n, so dass insbesondere das Wort $z = a^{n^2}$ so in fünf Teile $uvwxy$ zerlegbar wäre, dass uv^iwx^iy für jedes $i \geq 0$ zu L gehören würde.

Aber mit $r = |vx|$ gilt offenbar $|uv^iwx^iy| = n^2 + r(i-1)$.

Insbesondere ist also $uv^2wx^2y = a^s$ mit $s = n^2 + r$, aber da $1 \leq r \leq n$ gilt, ist s mit Sicherheit keine Quadratzahl, d.h. $uv^2wx^2y \notin L$ – im Widerspruch zur Aussage des Pumping Lemmas.