Abschlusseigenschaften

Im Vergleich zu Typ-3 liegen bei Typ-2 weniger Abschlusseigenschaften vor. Daher beweisen wir hier zwei Sätze, einen, dessen Aussage der Abschluss unter Vereinigung, Produkt und Sternoperation ist, und einen weiteren, der besagt, dass die Klasse der Typ-2 Sprachen *nicht abgeschlossen* ist gegen Komplement und Durchschnitt.

Satz 1: Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation und Sternoperation.

Beweisen werden wir zunächst den Abschluss unter Vereinigung.

Beweis: Abschluss unter Vereinigung

Es seien L_1 und L_2 Typ-2 Sprachen, gegeben durch die Typ-2 Grammatiken $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass V_1 und V_2 disjunkte Mengen sind und $S \notin V_1 \cup V_2$ eine *neue* Variable.

Nun bilden wir folgende Grammatik G:

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{(S, S_1), (S, S_2)\}, S)$$

Für jedes Wort $w \in L_1$ gilt $S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w$, und da alle Regeln von P_1 auch in G vorhanden sind, gilt offenbar auch $S \Rightarrow_G S_1 \Rightarrow_G^* w$, und daher $w \in L(G)$. Daher ist $L(G_1)$ Teilmenge von $L(G)$. Ebenso mit G_2 statt G_1 sieht man, dass auch $L(G_2) \subseteq L(G)$ gilt.

Umgekehrt kann aber jedes Wort von $L(G)$ nur auf eine dieser beiden Arten gebildet sein, also gilt auch $L(G) \subseteq L(G_1) \cup L(G_2)$.

Konkatenation und Stern

Beim Abschluss unter Konkatenation gehen wir wieder von G_1 und G_2 aus.

Diesmal ist die neue Grammatik:

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{(S, S_1 S_2)\}, S)$$

Man kann sich vergewissern, dass damit $L(G) = L(G_1)L(G_2)$ gilt.

Für die Sternoperation sei G_1 gegeben und es gelte $\varepsilon \notin L = L(G_1)$.

Wir bilden folgende Grammatik:

$$G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{(S, S_1), (S, S S_1)\}, S)$$

Damit gilt $L(G) = L^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Also ist $L^* \setminus \{\varepsilon\}$ eine Typ-2 Sprache und folglich auch L^*.

Nicht-Abgeschlossenheit von Typ-2

Jetzt kommen wir zu den *negativen* Ergebnissen:

Satz 2: Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Komplementbildung und Durchschnitt.

Zum Beweis genügt es offenbar, die Nicht-Abgeschlossenheit unter Durchschnitt nachzuweisen. Denn wäre die Klasse abgeschlossen unter Komplement, dann müsste sie auch unter Durchschnitt abgeschlossen sein!

Denn: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$. Das heißt, dass mit L_1 und L_2 auch deren Komplemente Typ-2 wären, und dann auf Grund der Abgeschlossenheit unter Vereinigung auch das Komplement von $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$, also $L_1 \cap L_2$. Widerspruch!

Nichtabschluss unter Durchschnitt

Es genügt, zwei Typ-2 Sprachen L_1 und L_2 anzugeben, für die $L_1 \cap L_2$ nachweislich keine Typ-2 Sprache ist.

Betrachte folgende Grammatik G_1:

$$G_1 = (\{S, A, B\}, \Sigma, P_1, S)$$

mit $P_1 = \{(S, AB), (A, aA), (A, a), (B, bBc), (B, bc)\}$.

Dann gilt $L(G_1) = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}$.

Außerdem betrachten wir die Grammatik G_2:

$$G_2 = (\{S, A, B\}, \Sigma, P_2, S)$$

mit $P_2 = \{(S, AB), (A, aAb), (A, ab), (C, Cc), (C, c)\}$.

Dann gilt $L(G_2) = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 1\}$.

$L_1 \cap L_2$ ist nicht Typ-2

Wir setzen $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$. Damit sind L_1 und L_2 Typ-2 Sprachen. Aber

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

Diese Sprache ist nicht kontextfrei, wie wir zu Beginn von Einheit 23 mit Hilfe des *uvwxy*-Theorems zeigen konnten!

Somit haben wir gezeigt, dass die Klasse der Typ-2 Sprachen nicht abgeschlossen gegen Durchschnitt ist.

Dasselbe gilt dann auf Grund der vorherigen Argumentation auch für den Abschluss gegen Komplementbildung.