Ein nützliches Lemma

Lemma: $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ sei ein PDA. Dann gilt für alle $z, z' \in Z$, alle $w, w', x \in \Sigma^*$ und alle $V, V', Y \in \Gamma^*$:

$$(z, w, V) \vdash^* (z', w', V') \quad \Longrightarrow \quad (z, wx, VY) \vdash^* (z', w'x, V'Y)$$

Beweis: Es genügt, die beiden Behauptungen

a) $(z, w, V) \vdash^* (z', w', V') \quad \Longrightarrow \quad (z, wa, V) \vdash^* (z', w'a, V')$

und b) $(z, w, V) \vdash^* (z', w', V') \quad \Longrightarrow \quad (z, w, VA) \vdash^* (z', w', V'A)$

für $a \in \Sigma$ bzw. $A \in \Gamma$ zu beweisen.
Daraus folgt das Lemma offenbar durch iterierte Anwendung.

Die Behauptungen a) und b) kann man jeweils durch Induktion über die Anzahl der vom PDA durchgeführten Schritte nachweisen.

Bitte führen Sie den Beweis für a) selbst im Detail durch.

Die erste Richtung

Wir formulieren die Behauptung als ersten Satz:

Satz 1: Für jede Typ-2 Grammatik G gibt es einen PDA M, so dass $L(G) = N(M)$ gilt.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ und für alle Regeln $(u, v) \in P$ gelte $u \in V$, $|v| \geq 1$.
(O.B.d.A. behandeln wir nur Sprachen, die ε nicht enthalten.)

Definiere $M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$, wobei:

$$\forall X \in V: \quad \delta(z, \varepsilon, X) = \{(z, \alpha) \mid (X, \alpha) \in P\}$$

$$\forall a \in \Sigma: \quad \delta(z, a, a) = \{(z, \varepsilon)\}$$

Alle anderen Mengen $\delta(z, a, A)$ und $\delta(z, \varepsilon, A)$ seien leer.

1. Richtung, anschaulich

Wir interpretieren die Arbeit des definierten PDA wie folgt:

Der Input sei $w = w_1 w_2 \dots w_n$. Eine Konfiguration

$$(z, w_{m+1} \dots w_n, A_1 A_2 \dots A_k)$$

soll genau dann erreicht werden können, wenn eine Ableitung

$$S \Rightarrow^* w_1 \dots w_m A_1 \dots A_k$$

existiert.

Wenn wir das realisieren, können wir die Konfiguration $(z, \varepsilon, \varepsilon)$ offenbar genau dann erreichen, wenn $S \Rightarrow^* w_1 \dots w_n$ gilt, d.h. wir erhalten

$$w \in N(M) \iff w \in L(G)$$

Anschaulich ist die obige Behauptung sehr plausibel, aber wir wollen den Beweis auch formal führen.

1. Richtung, formal

Wegen $w \in L(G) \iff S \Rightarrow^* w$ und $w \in N(M) \iff (z, w, S) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ genügt es zu zeigen:

$$S \Rightarrow^* w \quad \iff \quad (z, w, S) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

Um Induktion verwenden zu können, verschärfen wir die Aussage und beweisen:

Für alle $A \in V$ und alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$A \Rightarrow^* x \quad \iff \quad (z, x, A) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

Wir führen den Beweis per Induktion über die Ableitungslänge von $A \Rightarrow^* x$ und zeigen zunächst die Richtung von links nach rechts:

$$A \Rightarrow^* x \quad \Longrightarrow \quad (z, x, A) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

Induktionsanfang: $A \Rightarrow x$, d.h. $(A, x) \in P$ und nach Definition $(z, x) \in \delta(z, \varepsilon, A)$. Damit erhalten wir $(z, x, A) \vdash (z, x, x)$ und da $x \in \Sigma^*$ gilt, ergibt sich weiter:

$$(z, x, A) \quad \vdash \quad (z, x, x) \quad \vdash^* \quad (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

wie gewünscht.

Beweis (Abschluss)

Für den Induktionsschluss gehen wir davon aus, dass $A \Rightarrow^* x$ in mindestens zwei Schritten gilt. Die erste Regel sei $(A, w_1 A_2 w_3 \dots A_{k-1} w_k)$ für gewisse $A_{2i} \in V$ und $w_1, w_3, w_5 \dots w_k \in \Sigma^*$. Dann gibt es w_{2i} so, dass

$$x = w_1 w_2 w_3 \dots w_{k-1} w_k$$

und

$$A_j \Rightarrow^* w_j$$

für alle $j \in \{2, 4, \dots, k-1\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt aber

$$(z, w_j, A_j) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

und damit

$$\begin{aligned}
(z, w_1 \dots w_k, A) \quad & \vdash \quad (z, w_1 \dots w_k, w_1 A_2 w_3 A_4 \dots A_{k-1} w_k) \\
& \vdash^* \quad (z, w_2 \dots w_k, A_2 w_3 A_4 \dots A_{k-1} w_k) \\
& \vdash \quad (z, w_2 \dots w_k, w_2 w_3 A_4 \dots A_{k-1} w_k) \\
& \vdash^* \quad (z, w_3 \dots w_k, w_3 A_4 \dots A_{k-1} w_k) \\
& \vdash^* \quad (z, w_4 \dots w_k, A_4 w_5 \dots A_{k-1} w_k)
\end{aligned}$$

und so weiter, bis nur noch $(z, \varepsilon, \varepsilon)$ übrig bleibt.
Da alle Berechnungen des PDA so laufen müssen, folgt auch die Umkehrung.

Nur ein Zustand im PDA

Der eben konstruierte PDA hatte nur einen Zustand, was man auch so interpretieren kann, dass die endliche Zustandskontrolle gar nicht benutzt wird. Da wir im zweiten Satz ja noch beweisen werden, dass es zu jedem PDA eine gleichwertige Typ-2 Grammatik gibt, die wir dann in einen gleichwertigen PDA mit einem Zustand umwandeln können, bedeutet das:

Jeder PDA M kann so in einen PDA M' umgewandelt werden, dass $N(M) = N(M')$ gilt und M' nur einen einzigen Zustand hat.