Vom PDA zur Grammatik

Gegeben sei ein PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gehen wir davon aus, dass der PDA M in jedem Schritt den Keller maximal um ein Symbol vergrößert.

Wir entwerfen nun eine Grammatik mit folgender Variablenmenge:

$$V = \{S\} \cup Z \times \Gamma \times Z$$

Als Bedeutung der Variablen (p, A, q) denken wir uns folgendes:

> Wenn M im Zustand p mit oberstem Kellersymbol A gestartet wird, soll in dem Moment, wenn zum ersten Mal der Keller kleiner ist als zu Beginn, der Zustand q angenommen werden. (Das ist unser *Ziel* – nicht mehr!)

Die Grammatik G

Wir definieren die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit der eben angegebenen Variablenmenge V und der Regelmenge P, die wir nun festlegen. Dabei sei generell $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

1) $\forall z \in Z$: Es gehört $(S, (z_0, \#, z))$ zu P.
2) $\forall a$: Wenn $(z', \varepsilon) \in \delta(z, a, A)$, dann $((z, A, z'), a)$ in P.
3) $\forall a$: Wenn $(z_1, B) \in \delta(z, a, A)$, dann $((z, A, z'), a(z_1, B, z'))$ in P.
4) $\forall a$: Wenn $(z_1, BC) \in \delta(z, a, A)$, dann
$((z, A, z'), a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z'))$ in P.

Die Regeln 2) bis 4) gelten jeweils für alle $z, z', z_1, z_2 \in Z$ und alle $A, B, C \in \Gamma$.

Num müssen wir nur noch zeigen:

$$(z, A, z') \Rightarrow^* x \quad \Longleftrightarrow \quad (z, x, A) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon).$$

Warum genügt das?

Beweis (1. Richtung)

Wir beginnen mit:

$$(z, A, z') \Rightarrow^* x \quad \Longrightarrow \quad (z, x, A) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon).$$

1. Fall: $(z, A, z') \Rightarrow x$, also $(z', \varepsilon) \in \delta(z, x, A)$. Daher die Beh.

2. Fall: $(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z') \Rightarrow^* x$

   Dann gilt $x = ay$ und nach Induktionsvoraussetzung $(z_1, y, B) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$.
   Außerdem gehört (z_1, B) zu $\delta(z, a, A)$, also erhalten wir zusammen:

$$(z, x, A) = (z, ay, A) \vdash (z_1, y, B) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

3. Fall: $(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z') \Rightarrow^* x$

   Dann gilt $x = ay_1y_2$ und nach Induktionsvoraussetzung $(z_1, y_1, B) \vdash^* (z_2, \varepsilon, \varepsilon)$,
   aber auch $(z_2, y_2, C) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$.
   Außerdem gehört (z_1, BC) zu $\delta(z, a, A)$, also erhalten wir zusammen:

$$(z, x, A) = (z, ay_1y_2, A) \vdash (z_1, y_1y_2, BC) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

Damit ist die 1. Richtung gezeigt.

Beweis (2. Richtung)

Wir müssen zeigen:

$$(z, x, A) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon) \implies (z, A, z') \Rightarrow^* x.$$

Induktion über die Länge der Berechnung $(z, x, A) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$.

Ind.Anf.: $(z, x, A) \vdash (z', \varepsilon, \varepsilon)$ in einem Schritt, d.h. $|x| \leq 1$ und $(z', \varepsilon) \in \delta(z, x, A)$. Damit ist auch die Regel $((z, A, z'), x)$ in P.

Ind.Schritt: $(z, x, A) = (z, ay, A) \vdash (z_1, y, \alpha) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$. Dann gilt $|\alpha| \in \{1, 2\}$ (warum?), und wir müssen zwei Fälle prüfen:

1.Fall: $\alpha = B$ 2.Fall: $\alpha = BC$

Im 1. Fall haben wir $(z, ay, A) \vdash (z_1, y, B) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$, und daher $(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z')$ nach Definition und $(z_1, B, z') \Rightarrow^* y$ nach Induktionsvoraussetzung. Zusammen also die Behauptung.

Beweis (2. Richtung), Abschluss

Im 2. Fall haben wir $(z, ay, A) \vdash (z_1, y, BC) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ mit $(z_1, BC) \in \delta(z, a, A)$, also $((z, A, z'), a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z'))$ in P für alle $z_2 \in Z$.

Wir betrachten den Zeitpunkt, wenn die Kellerhöhe in der Berechnung erstmals wieder kleiner als zwei ist, dann gilt:

$$(z, ay, A) \vdash (z_1, y, BC) \vdash^* (z_2, y_2, C) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

mit einem Postfix y_2 von y, d.h. $y = y_1 y_2$ für geeignetes y_1.

Es folgt:

$$(z, ay_1y_2, A) \vdash (z_1, y_1y_2, BC) \vdash^* (z_2, y_2, C) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

also auch

$$(z_1, y_1, B) \vdash^* (z_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $(z_1, B, z_2) \Rightarrow^* y_1$ und ebenso $(z_2, C, z') \Rightarrow^* y_2$. Daraus folgt die Behauptung.

PDAs können in Echtzeit arbeiten

Eine interessante Folgerung aus unserem Beweis:

Jeder PDA kann so umgeformt werden, dass er in jedem Schritt ein Zeichen aus der Eingabe liest.

Das sieht man so:

Wenn man einen PDA zuerst in eine Typ-2 Grammatik umwandelt (wie eben gemacht) und diese dann in eine Greibach-Normalform bringt, dann wird der daraus resultierende PDA gemäß Satz 1 die gewünschte Eigenschaft haben.