

Abschlusseigenschaften von DCFL

Wir hatten schon in der letzten Einheit überprüft, dass auch die Klasse DCFL – wie CFL – nicht abgeschlossen ist gegenüber Durchschnittsbildung.

Wie war es mit dem Abschluss gegen Vereinigung bei CFL?

CFL ist abgeschlossen gegen Vereinigung, wie man mit der Darstellung über Typ-2 Grammatiken leicht feststellen kann.

Das geht bei DCFL so nicht, da wir hierfür keine Grammatikbeschreibung haben.

Und tatsächlich ist DCFL abgeschlossen gegen Komplement!

Also gilt:

Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen gegen Komplement, aber nicht gegen Durchschnitt und Vereinigung.

Abschlusseigenschaften von DCFL (2)

Den Abschluss unter Komplement würde man gerne so nachweisen wie bei DEAs: Man vertauscht einfach F und $Z \setminus F$. Dabei gibt es hier allerdings ein Problem:

Wenn die gesamte Eingabe gelesen ist, kann man mit ε -Übergängen von akzeptierenden zu nicht akzeptierenden Zuständen (und umgekehrt) wechseln.

Mit einigem technischen Aufwand kann man das aber lösen.

Wir wollen noch eine weitere Abschlusseigenschaft zeigen, die sowohl für CFL als auch für DCFL gilt, nämlich „Abschluss unter Schnitt mit einer regulären Menge“:

$$L \in DCFL, L' \in REG \implies L \cap L' \in DCFL$$

$$L \in CFL, L' \in REG \implies L \cap L' \in CFL$$

Beweis

Wir führen den Beweis zunächst für CFL, d.h. es sei L eine Typ-2 Sprache, für die wir einen PDA M haben, nämlich

$$M = (Z_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, z_1, \#, F_1)$$

Dabei verwenden wir *Akzeptierung durch Endzustand*.

Für L' sei ein DEA $A = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_2, F_2)$ gegeben.

Wir definieren nun den folgenden PDA:

$$M' = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \Gamma, \delta, (z_1, z_2), \#, F_1 \times F_2)$$

Dabei sei δ wie folgt definiert:

$$\delta((q_1, q_2), a, A) = \{((q'_1, q'_2), \alpha) \mid \delta_2(q_2, a) = q'_2 \wedge (q'_1, \alpha) \in \delta_1(q_1, a, A)\}$$

$$\delta((q_1, q_2), \varepsilon, A) = \{((q'_1, q_2), \alpha) \mid (q'_1, \alpha) \in \delta_1(q_1, \varepsilon, A)\}$$

Das heißt, wir lassen M und A „gleichzeitig“ laufen.

Und falls M ein DPDA war, ist auch M' einer.

Entscheidbarkeiten bei CFL

Verglichen mit den Typ-3 Sprachen hat die Klasse der Typ-2 Sprachen nur eine bescheidene Sammlung von entscheidbaren Problemen:

Satz: Das Wortproblem, das Leerheitsproblem und das Endlichkeitsproblem sind für kontextfreie Sprachen entscheidbar.

Bitte beachten: Da alle Sprachen in DCFL auch zu CFL gehören, gelten diese Entscheidbarkeitsresultate auch für DCFL.

Die Entscheidbarkeit des Wortproblems hatten wir bereits für alle Typ-1 Sprachen gezeigt. Mit dem CYK-Algorithmus haben wir allerdings eine weitaus effizientere Lösung – immer vorausgesetzt, dass die Sprache als CNF Grammatik vorliegt.

Beweis

Für das Leerheitsproblem (für CFL) bieten sich wieder zwei Lösungen an:

Man kann wie bei Typ-3 mit dem Pumping Lemma argumentieren.

Oder man entwirft einen Markierungsalgorithmus, der alle sogenannten *produktiven Variablen* ermittelt:

1. Markiere alle Variablen A , für die eine Regel $(A, w) \in P$ existiert mit $w \in \Sigma^*$.
2. Solange noch Markierungen dazu kommen: Markiere alle A , für die es eine Regel (A, β) in P gibt, bei der β nur aus Terminalen und markierten Variablen besteht.
3. Ausgabe **LEER**, wenn S nicht markiert ist.

Die Entscheidbarkeit des Endlichkeitsproblems zeigt man am besten wieder mit dem Pumping Lemma.

Zusätzlich für DCFL

Das Problem der „Gleichheit mit regulären Sprachen“ sei folgendermaßen definiert:

GEGEBEN: Eine Sprache $L \in DCFL$ und eine reguläre Sprache L' .

FRAGE: Gilt $L = L'$?

Dieses Problem ist entscheidbar, wie man folgender Beweiskette entnehmen kann:

$$\begin{aligned} L = L' &\iff L \subseteq L' \wedge L' \subseteq L \\ &\iff L \cap \bar{L}' = \emptyset \wedge L' \cap \bar{L} = \emptyset \end{aligned}$$

Nach unseren vorherigen Ergebnissen sind aber sowohl $L \cap \bar{L}'$, als auch $L' \cap \bar{L}$ in DCFL, und Leerheit ist in DCFL entscheidbar. Also ist die Gleichheit von L und L' entscheidbar, was zu zeigen war.