Konfigurationen

Welche Informationen müssen bei einer Turingmaschine notiert werden, damit alle Voraussetzungen vorliegen, um die weitere Arbeit der TM festzulegen?

1) Der Inhalt des Arbeitsbandes (allerdings nur der *relevante* Teil)

2) Die Kopfposition (aber wie?)

3) Der Zustand

Das motiviert uns zu folgender Definition:

Eine Konfiguration ist ein Element von $\Gamma^* Z \Gamma^*$.

Die Konfiguration $\alpha z \beta$ beschreibt folgende Situation:

Zustand ist z, Bandinhalt ist $\alpha\beta$, der Schreib-/Lesekopf ist so positioniert, dass er das erste Zeichen von β scannt.

Übergänge auf Konfigurationsebene

Wir wollen jetzt die Arbeit der Turingmaschine in der Schreibweise der Konfigurationen einführen. Wir definieren die Relation $\vdash$ nur für deterministische TMs, die Adaption für NTMs sollte klar sein. Später werden wir dann hauptsächlich den reflexiven transitiven Abschluss $\vdash^*$ brauchen.

Es sei $\delta(z, b_1) = (z', c, L)$. Dann erhalten wir

$$a_1 a_2 \ldots a_m z b_1 b_2 \ldots b_n \quad \vdash \quad a_1 a_2 \ldots a_{m-1} z' a_m c b_2 \ldots b_n$$

Es sei $\delta(z, b_1) = (z', c, R)$. Dann erhalten wir

$$a_1 a_2 \ldots a_m z b_1 b_2 \ldots b_n \quad \vdash \quad a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m c z' b_2 \ldots b_n$$

Es sei $\delta(z, b_1) = (z', c, N)$. Dann erhalten wir

$$a_1 a_2 \ldots a_m z b_1 b_2 \ldots b_n \quad \vdash \quad a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m z' c b_2 \ldots b_n$$

Ein Beispiel

Wir wollen eine TM entwerfen, die den Bandinhalt x (dabei sei $x = x_1 x_2 \ldots x_n \in \{0,1\}^*$) bitweise invertiert, d.h. jede 0 wird eine 1, und jede 1 wird eine 0.

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$$

mit $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0,1,\Box\}$, $E = \{z_2\}$, und δ wie folgt:

$$\delta(z_0, 0) = (z_0, 1, R) \qquad \delta(z_1, 0) = (z_1, 0, L)$$

$$\delta(z_0, 1) = (z_0, 0, R) \qquad \delta(z_1, 1) = (z_1, 1, L)$$

$$\delta(z_0, \Box) = (z_1, \Box, L) \qquad \delta(z_1, \Box) = (z_2, \Box, R)$$

Keine weiteren Übergänge!

Beispielrechnung

Wir wollen die Arbeit der entworfenen TM auf dem Input 11010 vollständig entwickeln – auf Konfigurationsebene. Eine Darstellung als Zeichnung sollte bitte jeder selbst erstellen...

$$
\begin{array}{lclcl}
\square\square z_0 11010\square\square & \vdash & \square\square 0 z_0 1010\square\square & & \\
 & \vdash & \square\square 00 z_0 010\square\square & & \\
 & \vdash & \square\square 001 z_0 10\square\square & & \\
 & \vdash & \square\square 0010 z_0 0\square\square & & \\
 & \vdash & \square\square 00101 z_0 \square\square & & \\
 & \vdash & \square\square 0010 z_1 1\square\square & \vdash & \square\square 001 z_1 01\square\square \\
 & \vdash & \square\square 00 z_1 101\square\square & \vdash & \square\square 0 z_1 0101\square\square \\
 & \vdash & \square\square z_1 00101\square\square & \vdash & \square z_1 \square 00101\square\square \\
 & \vdash & \square\square z_2 00101\square\square & &
\end{array}
$$

Die akzeptierte Sprache einer TM

Mit der Konfigurationsdarstellung ist es einfach, die zur TM M gehörende *akzeptierte Sprache* zu definieren:

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid z_0 x \vdash^* \alpha z \beta \text{ für ein } z \in E \text{ und beliebige } \alpha, \beta \in \Gamma^*\}$$

Was kann also passieren, wenn x nicht in $T(M)$ liegt?

Entweder M hält mit einem Zustand $z \in Z \setminus E$

oder M gerät in eine Schleife: $z_0 x \vdash^* \alpha z \beta \vdash \alpha' z' \beta' \vdash^* \alpha z \beta$

oder M rechnet endlos, ohne in eine Schleife zu kommen

Linear beschränkte Turingmaschinen

Ein **LBA** ist eine Turingmaschine, die auf dem Arbeitsband nie den Platz der Eingabe verlässt. Um das leisten zu können, muss der LBA den rechten Rand der Eingabe erkennen, ohne das nachfolgende Leerzeichen zu sehen – denn das gehört ja nicht mehr zur Eingabe! Deshalb definieren wir

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$$

Eine nichtdeterministische Turingmaschine M nennen wir einen linear beschränkten Automat, wenn für alle $a_1 \dots a_n \in \Sigma^+$ und $\alpha, \beta \in \Gamma^*$, $z \in Z$ mit $z_0 a_1 \dots a_{n-1} \hat{a}_n \vdash^* \alpha z \beta$ gilt: $|\alpha\beta| = n$.

Wir setzen dann

$$T(M) = \{a_1 \dots a_n \in \Sigma^* \mid \exists z \in E : z_0 a_1 \dots a_{n-1} \hat{a}_n \vdash^* \alpha z \beta\}$$