LBA und Satz von Kuroda

Zunächst erinnern wir uns noch einmal, was ein LBA ist und wie er arbeitet:

Ein LBA ist eine Turingmaschine, die mit ihrem Schreib-/Lesekopf niemals den Platz verlässt, auf dem sich anfangs die Eingabe befunden hat. Dazu ist das letzte Eingabezeichen markiert, und die Maschine ist generell nichtdeterministisch.

Damit gilt:

> **Satz:** Die Klasse der von LBAs akzeptierten Sprachen ist gleich der Klasse der Typ-1 Sprachen.

Wie bei den anderen Sätzen gehen wir auch hier davon aus, dass die betroffenen Sprachen das leere Wort nicht enthalten.

Beweisidee

Wir wollen zuerst die Richtung von rechts nach links zeigen. Also gehen wir von einer Typ-1 Sprache L aus, die durch eine Typ-1 Grammatik (ohne ε-Sonderregel) gegeben ist, d.h. $\varepsilon \notin L$.

Die Grammatik sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $(u, v) \in P$ gilt: $|u| \leq |v|$.

Auf Input x müssen wir nun unseren LBA benutzen, um zu überprüfen, ob es eine Ableitung $S \Rightarrow^* x$ in G gibt.

Die Idee hierbei ist, die Ableitung „rückwärts“ zu erraten.

Dabei starten wir mit x und versuchen nun Schritt für Schritt, die einzelnen Ableitungsschritte umgekehrt durchzuführen, bis wir das Startsymbol erreichen und stoppen können.

Auf den folgenden Folien erarbeiten wir die Details.

Beweis 1. Richtung (1)

Die Eingabe sei $x = x_1 x_2 \dots x_n$ mit $n \geq 1$ und $x_i \in \Sigma$ für alle i.

Zu prüfen ist, ob in G eine Ableitung $S \Rightarrow^* x$ möglich ist, d.h. ob α_i $(1 \leq i \leq k)$ existieren mit:

$$S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_k = x$$

Hierbei muss immer $|\alpha_i| \leq |\alpha_{i+1}|$ gelten.

Auf dem Band des LBA steht anfangs $x = \alpha_k$.

Wie können wir nun allgemein erreichen, dass aus einem α_{j+1} ein dazu passendes α_j wird?

Wir müssen eine Regel $(u, v) \in P$ finden, für die es eine Zerlegung von α_{j+1} als $\alpha_{j+1} = xvy$ gibt. Haben wir diese gefunden, müssen wir erreichen, dass aus xvy das Wort xuy wird, welches dann α_j ist.

Beweis 1. Richtung (2)

Wir skizzieren, wie man den eben beschriebenen Vorgang mit einem LBA realisieren kann:

1. Schritt: Beginne ganz links und entscheide jeweils, ob der Schreib-/Lesekopf noch eins weiter nach rechts gehen soll.

Wenn JA: Bewege Kopf nach rechts, ohne Band zu ändern. Wiederhole den 1. Schritt.

Wenn NEIN: Entscheide nichtdeterministisch, welche Regel (u, v) aus P geprüft werden soll. Finde dann Zeichen für Zeichen heraus, ob an der gewählten Position tatsächlich v folgt und ersetze es gegebenenfalls durch u.

Achtung: Hierbei muss i.a. der hintere Teil des Bandes nach links verschoben werden.

Beweis 1. Richtung (3)

2. Schritt: Überprüfen, ob der Bandinhalt nur noch aus einem Symbol S besteht.

Wenn JA: STOP – Akzeptieren.

Wenn NEIN: Weiter mit Schritt 1.

Diese zwei Schritte werden immer wieder iteriert, d.h. entweder unendlich oft, oder so lange, bis im 2. Schritt der Bandinhalt S vorgefunden wird.

Bitte beachten: Es handelt sich hier um eine nichtdeterministische Berechnung. Also erhalten wir im allgemeinen eine große Zahl verschiedener Berechnungswege, und letztlich müssen wir unterscheiden, ob es mindestens einen haltenden Weg gibt, oder ob alle Wege unendlich lang sind.

Beweis 1. Richtung, Abschluss

Was können wir daraus schließen, wenn es mindestens einen akzeptierenden Rechenweg gibt?

Dann haben wir also mit einer endlichen Abfolge der beiden Rechenschritte die Satzform S auf dem Band erhalten. Das heißt, wir haben durch Rückwärtsanwendung von Regeln aus P die Satzform $\alpha_k = x$ in k Schritten zur Satzform S gemacht. Wenn wir die Zwischensatzformen, die wir jeweils in Schritt 2 vorgefunden haben, mit α_i für $i = k-1, k-2, \ldots, 2, 1$ bezeichnen, haben wir also die Existenz der folgenden Ableitungskette nachgewiesen:

$$S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_k = x$$

Andererseits werden wir umgekehrt eine solche Ableitungskette auch auf einem Rechenweg finden, wenn sie existiert! Also akzeptieren wir den Input x genau dann, wenn $x \in L(G)$ gilt.