Widerspruchsbeweis

Man kann Aussagen oft auch beweisen, indem man das Gegenteil annimmt und zeigt, dass sich daraus ein Widerspruch ergibt:

Schema:

Zu zeigen ist die Aussage A.

Beweis:

Angenommen, die Aussage $\neg A$ ist wahr. Dann ...
Und so weiter, Schritt für Schritt, bis sich
ein Widerspruch (z.B. 2=5) ergibt. Wenn alle benutzten
Schritte folgerichtig waren, kann der Widerspruch nur
durch $\neg A$ kommen. Also muss $\neg A$ falsch, d.h. A wahr sein.

Als Beispiel kann hier der bekannte Beweis dienen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Beweis durch Gegenbeispiel

Wenn wir widerlegen sollen, dass jedes Objekt einer Menge M die Eigenschaft P hat, können wir so vorgehen:

Wähle ein Objekt x.
Zeige, dass $x \in M$ gilt.
Zeige, dass x nicht die Eigenschaft P hat.

Beispiel:

Man soll widerlegen, dass alle ungeraden Zahlen ≥ 3 Primzahlen sind.
Man setzt $x = 9$ und prüft, dass 9 eine ungerade Zahl ist.
Man zerlegt x in ein Produkt:

$$x = 9 = 3 \cdot 3$$

Also ist x keine Primzahl; damit ist die Aussage widerlegt.

Vollständige Induktion

Ein besonders wichtiges Beweisschema ist der Beweis durch *vollständige Induktion*:

P sei eine potentielle Eigenschaft natürlicher Zahlen.

> Wir zeigen, dass 0 diese Eigenschaft hat, in Zeichen: $P(0)$.
>
> Wir zeigen außerdem, dass aus $P(n-1)$ folgt, dass auch $P(n)$ gilt (für jedes $n \geq 1$).
>
> DANN GILT $P(n)$ FÜR ALLE n.

Eine bekannte Anwendung dieser Technik ist der Beweis der Summenformel für die ersten n Zahlen $1, \ldots, n$:

Für alle n gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Beweis der Summenformel

Zu zeigen ist $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.
Diese Aussage nennen wir $P(n)$.

Induktionsanfang: (Zu zeigen ist $P(0)$)

Für $n = 0$ ist die Summe eine leere Summe mit Wert 0.
Rechts steht $\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (0+1) = 0$. Also ist $P(0)$ gezeigt.

Induktionsschritt: (Zu zeigen ist für alle n: $P(n-1) \implies P(n)$)

Wir können also $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$ annehmen und müssen daraus $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ schließen.

Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = \frac{1}{2}(n-1) \cdot n + n$

$$= (\tfrac{1}{2}(n-1) + 1) \cdot n = \tfrac{1}{2}(n+1) \cdot n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Also gilt $P(n)$, und damit ist der Beweis vollständig.

Ein Induktionsbeweis über Schuhgrößen

Was ist FALSCH an folgendem „Beweis“?

Behauptung:

Alle Teilnehmer dieser Vorlesung haben gleiche Schuhgröße.

Wir formalisieren diese Aussage, um einen Induktionsbeweis führen zu können, wie folgt:

Jede Menge von n Teilnehmern dieser Vorlesung hat die Eigenschaft, dass alle ihre Teilnehmer die gleiche Schuhgröße haben.

Der Induktionsanfang ist trivial - man kann ihn nicht nur für $n = 0$, sondern sogar auch für $n = 1$ mühelos führen...

Induktionsschritt

Wir können die Aussage für alle Teilmengen von $n-1$ Vorlesungsteilnehmern voraussetzen und müssen nachweisen, dass sie dann auch für jede Teilmenge von n Teilnehmern der Vorlesung gilt.

Sei also $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ eine Menge von n Teilnehmern dieser Vorlesung. Wir sollen zeigen, dass alle diese die gleiche Schuhgröße haben. Dazu betrachten wir die Mengen

$$\{T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}\} \quad \text{und} \quad \{T_2, \ldots, T_{n-1}, T_n\}.$$

Beide haben $n-1$ Elemente, also gilt nach Voraussetzung in beiden, dass alle ihre Elemente gleiche Schuhgröße haben. Hieraus folgt natürlich sofort, dass auch in $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ alle Elemente gleiche Schuhgröße haben!

Sehen Sie, wo der Fehler ist?