Abschlusseigenschaften der Sprachklassen

Wir haben im ersten Abschnitt gesehen, dass die Klasse der Typ-3 Sprachen eine sehr *runde* bzw. *robuste* Klasse ist – in dem Sinne, dass sie unter vielen naheliegenden Operationen abgeschlossen ist. Aber wie war das bei den anderen Chomsky-Klassen?

Die einzige weitere Chomsky-Klasse, die zumindest unter allen booleschen Operationen abgeschlossen ist, ist die Klasse der kontextsensitiven Sprachen, also Typ-1. Um das nachzuvollziehen, brauchten wir allerdings den raffinierten Beweis von Immerman und Szelepcsényi für den Abschluss unter Komplementbildung.

Nicht alle der auf der nächsten Folie angegebenen Abschluss- oder Nichtabgeschlossenheits-Resultate konnten wir hier beweisen. Der Nichtabschluss der Typ-0 Klasse unter Komplement wird z.B. durch das *Halteproblem* in der Berechenbarkeitstheorie gezeigt.

Tabelle *Abschlusseigenschaften*

Die Abgeschlossenheit oder Nichtabgeschlossenheit der Chomsky-Klassen und der Klasse DCFL unter wichtigen Operationen ist jeweils der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Schnitt	Vereinig.	Kompl.	Produkt	Stern
Typ-3	JA	JA	JA	JA	JA
DCFL	NEIN	NEIN	JA	NEIN	NEIN
Typ-2	NEIN	JA	NEIN	JA	JA
Typ-1	JA	JA	JA	JA	JA
Typ-0	JA	JA	NEIN	JA	JA

Entscheidbarkeitsfragen

Wir haben eine Reihe von Problemen, die wir auf die verschiedenen Sprachklassen anwenden können, etwa das folgende:

Wortproblem:

Gegeben eine Sprache L und ein Wort x.

Frage: Gilt $x \in L$?

Wir haben schon zu Beginn des Semesters gezeigt, dass dieses Problem für alle Typ-1 Sprachen entscheidbar ist.
Daraus folgt sofort, dass es auch für Typ-2 und Typ-3 Sprachen entscheidbar ist, denn das sind ja dann Spezialfälle - desgleichen auch für DCFL, aus dem gleichen Grund.

Aber wie ist das bei Typ-0? In der Tat ist das Typ-0 Wortproblem nichts anderes als das *Halteproblem*, und daher *unentscheidbar!*

Leerheit, Äquivalenz, Schnitt

Als Leerheitsproblem bezeichnet man die Frage, ob eine Sprache die leere Menge ist. Dieses Problem ist für gegebene Typ-1 Sprache unentscheidbar; der Beweis ist Teil der Berechenbarkeitstheorie. Dass das Problem dann auch für Typ-0 unentscheidbar ist, ist eine unmittelbare Folgerung, da Typ-1 ein Spezialfall von Typ-0 ist. Die Entscheidbarkeit für Typ-2 (und damit auch für DCFL und Typ-3 Sprachen) hatten wir bewiesen.

Bei Typ-3 sind auch Äquivalenz- und Schnittproblem entscheidbar.

Das einzige weitere Entscheidbarkeitsresultat bei diesen zwei Problemen liefert uns der gefeierte Beweis von Géraud Sénizergues, dass für DCFL das Äquivalenzproblem entscheidbar ist.
Für dieses inzwischen etwa 20 Jahre alte Resultat gibt es bis heute keinen einfachen und leicht verständlichen Beweis...

Tabelle *Entscheidbarkeiten*

Wir fassen die bekannten (und in den JA-Fällen mit Ausnahme des Sénizergues-Resultats hier bewiesenen) Resultate über die Entscheidbarkeit der angesprochenen Probleme in den Fällen der Chomsky-Klassen, einschl. DCFL, in folgender Tabelle zusammen:

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnitt-problem
Typ-3	JA	JA	JA	JA
DCFL	JA	JA	JA	NEIN
Typ-2	JA	JA	NEIN	NEIN
Typ-1	JA	NEIN	NEIN	NEIN
Typ-0	NEIN	NEIN	NEIN	NEIN

Nochmal zum Wortproblem

Bisher hatten wir beim Wortproblem für die verschiedenen Klassen nur die Entscheidbarkeit (oder Unentscheidbarkeit) betrachtet. Aber in den entsprechenden Abschnitten hatten wir für verschiedene Klassen verschiedene Zeitkomplexitäten des Wortproblems festgestellt.

Am schnellsten geht die „Erkennung“ eines Wortes natürlich mit einem DEA, der ja in jedem Schritt einen Buchstaben liest und nach Lesen des gesamten Wortes sofort „weiß“, ob dieses Wort zur Sprache gehört – also haben wir einen *Realzeit-Algorithmus*.

Auch für Typ-2 Sprachen haben wir noch einen recht schnellen Algorithmus - den CYK-Algorithmus, der in *kubischer Zeit* arbeitet. Aber was ist bei DCFL? Und wie sieht es bei Typ-1 und Typ-0 aus?

Wortproblem für Typ-0, Typ-1 und DCFL

Wir beginnen bei den großen Klassen:

Für Typ-0 entspricht das Wortproblem dem Halteproblem, das *bekannterweise unentscheidbar* ist – wir brauchen uns also in diesem Fall nicht mehr um Komplexität zu kümmern.

Für Typ-1 Sprachen gibt es den zu Anfang des Semesters angegebenen Exponentialzeit-Algorithmus. Man kann keine wesentlich bessere Laufzeit erwarten, da das Problem NP-hart ist (dieser Begriff wird in der Komplexitätstheorie eingeführt).

Für die deterministisch kontextfreien Sprachen ist hier wichtig, dass diese Klasse genau aus den Sprachen besteht, für die es eine LR(k)-Grammatik gibt. Dadurch gibt es einen Linearzeit-Algorithmus für das Wortproblem solcher Sprachen.

Tabelle *Komplexität des Wortproblems*

Diese Ergebnisse fassen wir hier noch einmal zusammen:

Klasse	Komplexität des Wortproblems	Bemerkungen
Typ-3	Linearzeit	„Realzeit“
DCFL	Linearzeit	
Typ-2	$\mathcal{O}(n^3)$	
Typ-1	Exponentialzeit (?)	„NP-hart“
Typ-0	Unentscheidbar	