1.2.1 Endliche Automaten

Ein deterministischer endlicher Automat (DEA, englisch DFA) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$. Dabei ist

- Z eine endliche Menge Die Menge der Zustände
- Σ eine endliche Menge mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$ Das Alphabet
- $z_0 \in Z$ Der Startzustand
- $E \subseteq Z$ Die Menge der akzeptierenden Endzustände
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ Die Überführungsfunktion

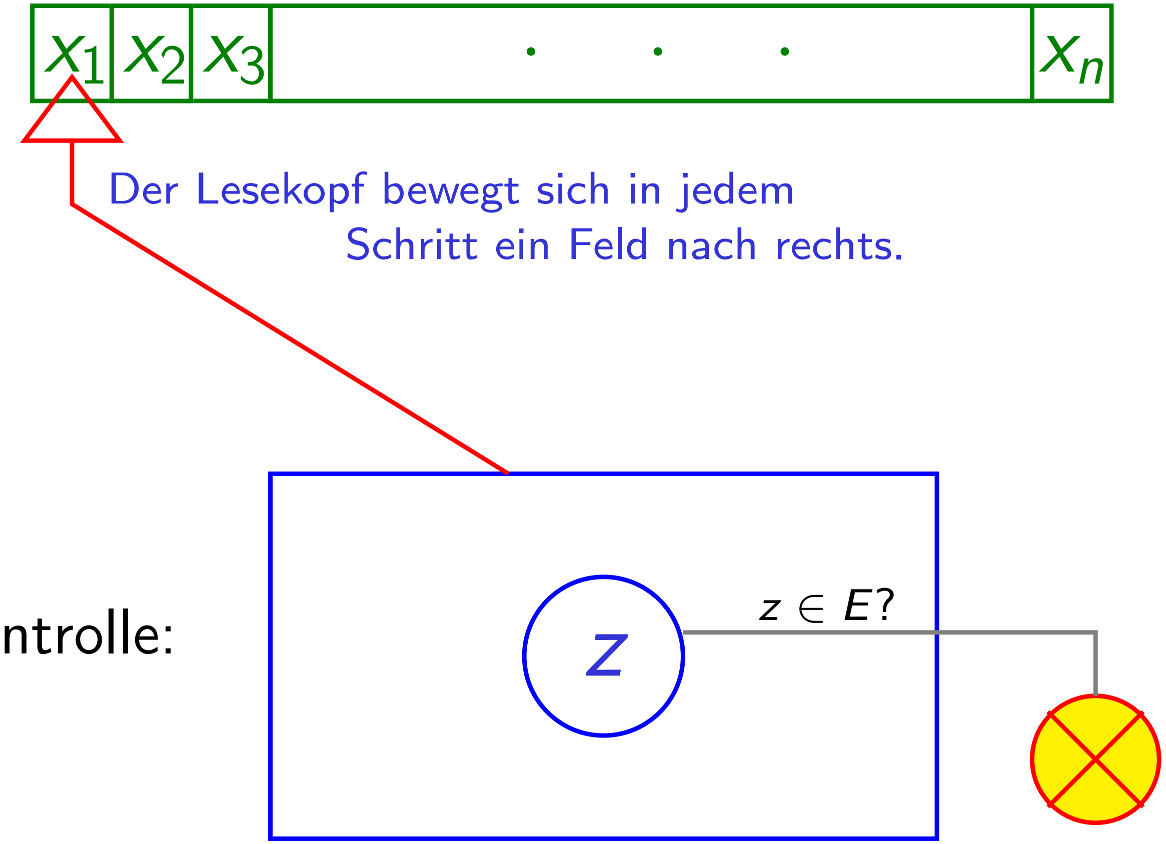
Die Überführungsfunktion wollen wir so interpretieren, dass $\delta(z, \sigma) = z'$ bedeutet:

Wenn M im Zustand z ein σ liest, geht M in den Zustand z' über.

DEA bildlich dargestellt

- Eingabeband:
- Lesekopf:
- Endl. Zustandskontrolle:

Eingabe sei $x_1 x_2 \dots x_n$, $x_i \in \Sigma$



Der Zustand wird schrittweise gemäß δ angepasst.

Beispiel

Als Beispiel betrachten wir den Automat M:

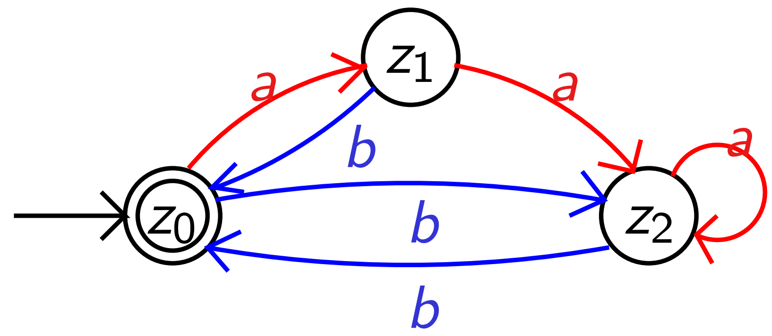
$$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_0\}).$$

$\delta(z_0, a) = z_1 \quad \delta(z_0, b) = z_2$

$\delta(z_1, a) = z_2 \quad \delta(z_1, b) = z_0$

$\delta(z_2, a) = z_2 \quad \delta(z_2, b) = z_0$

Graphische Darstellung von M:



Welche Sprache *erkennt* dieser Automat?

Die Funktion $\hat{\delta}$

Ähnlich wie wir jeder Grammatik G eine Sprache $L(G)$ zuordnen konnten, wollen wir jetzt mit jedem DEA M eine Sprache $T(M)$ assoziieren.

Dazu benötigen wir zuerst eine verallgemeinerte Form der Überführungsfunktion δ. Wir suchen eine Funktion, die beschreibt, in welchen Zustand man gelangt, wenn man im Zustand z beginnt und das *Wort* $w \in \Sigma^*$ liest.

Definiere $\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(z, \varepsilon) &= z && \text{für alle } z \in Z \\ \hat{\delta}(z, ax) &= \hat{\delta}(\delta(z, a), x) && \text{für alle } z \in Z,\ a \in \Sigma,\ x \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Damit ist $\hat{\delta}$ auf $Z \times \Sigma^*$ eindeutig definiert.

Ein nützliches Resultat über $\hat{\delta}$

Für alle $z \in Z$ und alle $x, w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\boxed{\hat{\delta}(z, wx) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(z, w), x)}$$

Den Beweis führen wir induktiv über die Länge von w.
Für $w = \varepsilon$ müssen wir zeigen: $\hat{\delta}(z, x) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(z, \varepsilon), x)$.
Aber das ist klar, da $\hat{\delta}(z, \varepsilon) = z$ nach Definition von $\hat{\delta}$ gilt.

Für den Induktionsschritt sei $w = ay$ mit $a \in \Sigma$ und $y \in \Sigma^*$.
Nach Ind.vor. gilt für alle $q \in Z$: $\hat{\delta}(q, yx) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), x)$

Nun setzen wir $q = \delta(z, a)$ und erhalten:

$$\hat{\delta}(z, wx) = \hat{\delta}(z, ayx) = \hat{\delta}(q, yx) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), x) =$$
$$\hat{\delta}(\hat{\delta}(\delta(z, a), y), x) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(z, ay), x) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(z, w), x)$$

q.e.d.

Die Sprache $T(M)$

Mit der Funktion $\hat{\delta}$ können wir nun die Sprache $T(M)$, die zum endlichen Automat M gehört, kurz und prägnant definieren:

Definition: Die vom Automat $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ akzeptierte Sprache $T(M)$ ist gegeben durch

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(z_0, w) \in E\}$$

In unserem Beispielautomat von Folie 8.3 galt offensichtlich $\hat{\delta}(z_0, ab) = z_0$, und daher auch $\hat{\delta}(z_0, (ab)^n) = z_0$.

Folglich liegen in diesem Fall alle Wörter $(ab)^n$ in $T(M)$.
Es gibt aber noch viele andere Wörter in $T(M)$.

(Aber keine, die auf a enden – warum nicht?)

DEA und Typ-3

Wir wollen nun nachweisen, dass jede von einem deterministischen endlichen Automat M akzeptierte Sprache eine Typ-3 Sprache ist. Dazu genügt es, eine Typ-3 Grammatik G anzugeben, die die Gleichung $T(M) = L(G)$ erfüllt.

Der Automat sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$.

Wir benutzen Z als Variablenmenge unserer Grammatik.

Startvariable ist dann sinnvollerweise z_0, die Menge P der *Produktionen*, also die Übergangsregeln, werden wir gleich definieren. Wir erhalten die Grammatik

$$G = (Z, \Sigma, P, z_0)$$