Die Regeln von G

Wir definieren die Menge P wie folgt:

Das Paar (p, aq) ist genau dann in P, wenn im Automat M die Gleichung $\delta(p, a) = q$ gilt.

Das Paar (p, a) ist genau dann in P, wenn im Automat M die Gleichung $\delta(p, a) = q$ gilt für ein $q \in E$.

Damit ist die Grammatik G vollständig definiert.
Nun müssen wir noch zeigen, dass tatsächlich die Gleichung

$$T(M) = L(G)$$

gilt.

$w \in T(M) \Rightarrow w \in L(G)$

Für die erste Richtung nehmen wir an, $w = w_1 \dots w_n$ sei ein Wort der Länge n in $T(M)$.

Wir definieren eine Folge $z_1, \dots, z_n$ von Zuständen aus Z durch:

$$z_i := \hat{\delta}(z_0, w_1 \dots, w_i)$$

Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$: $\quad \delta(z_{i-1}, w_i) = z_i$.

Nach unserer Definition von P gilt dann aber auch:

$$(z_{i-1}, w_i z_i) \in P.$$

Desweiteren ist $z_n \in E$ und daher auch $(z_{n-1}, w_n) \in P$.

Also erhalten wir folgende Ableitung für w in der Grammatik G:

$$z_0 \Rightarrow w_1 z_1 \Rightarrow w_1 w_2 z_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 w_2 \dots w_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n$$

$w \in L(G) \Rightarrow w \in T(M)$

Für die andere Richtung sei auch wieder $w = w_1 \dots w_n$ ein Wort der Länge n, diesmal in $L(G)$.

Da G eine Typ-3 Grammatik ist, gibt es eine Ableitung der Form

$$z_0 \Rightarrow w_1 z_1 \Rightarrow w_1 w_2 z_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 w_2 \dots w_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n$$

Und folgerichtig müssen in P Ableitungsregeln $(z_{i-1}, w_i z_i)$ für $1 \leq i < n$, sowie eine Regel (z_{n-1}, w_n) existieren.

Dann gilt aber $\delta(z_{i-1}, w_i) = z_i$ für $1 \leq i < n$ und $\delta(z_{n-1}, w_n) \in E$.

Das heißt: $\hat{\delta}(z_0, w) \in E$, also $w \in T(M)$.

Beispiel

Wir nehmen noch einmal den Automat von Folie 8.3.

$$\delta(z_0, a) = z_1 \qquad \delta(z_1, a) = z_2 \qquad \delta(z_2, a) = z_2$$
$$\delta(z_0, b) = z_2 \qquad \delta(z_1, b) = z_0 \qquad \delta(z_2, b) = z_0$$

Die folgende Typ-3 Grammatik erzeugt die gleiche Sprache:

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

wobei $V = \{S, X, Y\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und P wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} P \quad = \quad \{ \ & (S, aX), (S, bY), (X, aY), (X, bS), \\ & (Y, aY), (Y, bS), (X, b), (Y, b) \ \} \end{aligned}$$

Die Aufgabe vom Beginn des Abschnitts

An dieser Stelle möchten wir noch eine Auflösung zum Problem von Folie 7.6 geben:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* : \ |w|_a + 2 \cdot |w|_b \equiv 1 \bmod 7\}$$

Für L sollte ein Automat (graphisch) angegeben werden. Haben Sie es gemacht?

Hier kommt eine nicht so anschauliche, aber trotzdem brauchbare Beschreibung:

$$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E) \qquad \text{mit}$$

$Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{z_1\}$ und δ so:

$$\delta(z_i, a) = z_{(i+1) \bmod 7}$$
$$\delta(z_i, b) = z_{(i+2) \bmod 7}$$

für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Der zugehörige Automat hat also 7 Zustände und kann nun leicht auch graphisch entworfen werden.

Nichtdeterministische endliche Automaten

Wir haben gerade gesehen, dass DEAs nur reguläre (d.h. Typ-3) Sprachen erkennen können. Wir würden gerne auch zeigen, dass es umgekehrt *für jede* reguläre Sprache so einen DEA gibt.

Das wäre aber vergleichsweise schwierig und langwierig zu zeigen.

Daher behelfen wir uns mit einem kleinen Trick: Wir führen ein weiteres Modell ein (NEA), das formal stärker ist als der DEA und das deshalb ausreicht, um für jede reguläre Sprache einen Automaten zu beinhalten. Wenn man zudem die Gleichwertigkeit von NEA und DEA zeigen kann, hat man wie gewünscht auch die Gleichwertigkeit von DEA und Typ-3 nachgewiesen.

Deshalb geben wir jetzt zunächst eine formale Definition des NEA.

Definition des NEA

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA, englisch NFA) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$. Dabei ist:

- Z eine endliche Menge Die Menge der Zustände
- Σ eine endliche Menge mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$ Das Alphabet
- $S \subseteq Z$ Die Menge der Startzustände
- $E \subseteq Z$ Die Menge der akzeptierenden Endzustände
- $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ Die Überführungsfunktion

Die Überführungsfunktion wollen wir so interpretieren, dass $z' \in \delta(z, \sigma)$ bedeutet:

Wenn M im Zustand z ein σ liest, kann M in den Zustand z' übergehen.

Zur Erinnerung: $\mathcal{P}(Z)$ ist die Potenzmenge von Z, d.h. die Menge der Teilmengen.