Übungsblatt 6

Punkte: 50

Hertrampf, Mattes
FMI/TI, FMI/ALG
Universität Stuttgart

Aufgabe 1: Binomialkoeffizienten **[0]**

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. [P]

Aufgabe 2: Primzahldichte und Erwartungswert **[15]**

(a) Betrachten Sie ein Zufallsexperiment bei dem Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit p eintritt. Das Gegenereignis B tritt entsprechend mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ ein. Sie wiederholen des Zufallsexperiment (unabhängig) solange, bis Ereignis A zum ersten Mal eintritt.

Leiten Sie den Erwartungswert in Abhängigkeit von p für die Anzahl an Wiederholungen her, bis Ereignis A zum ersten Mal eintritt.

(b) Sie benötigen (zum Beispiel für das RSA-Verfahren) eine Primzahl aus dem Bereich $N = \{1, \ldots, n\}$. Dazu gehen Sie folgendermaßen vor: Sie ziehen zunächst zufällig gleichverteilt (irgend)eine Zahl x aus N. Anschließend verwenden Sie einen Primzahltest um festzustellen, ob x prim ist. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass es sich um einen deterministischen Test handelt, der die Primalität von x immer korrekt feststellt oder ausschließt. Ist x prim, haben Sie eine Primzahl gefunden. Ist x nicht prim, ziehen Sie solange (unabhängig) neue Zahlen bis Sie eine Primzahl gefunden haben.

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert für die Anzahl an Runden, bis eine Primzahl gefunden wurde, durch $\log n$ (was im Wesentlichen der Bitlänge von n entspricht) beschränkt ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über die Primzahldichte aus der Vorlesung

$$\frac{n}{\log_2 n} \leq \pi(n) \leq \frac{(2+\varepsilon)n}{\log_2 n},$$

wobei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen aus N bezeichnet.

Aufgabe 3: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen **[5]**

Seien $X, Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ zwei unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

Aufgabe 4: Bernoulli-Verteilung und Binomialverteilung. **[15]**

Ihr bester Freund möchte mit Ihnen am kommenden Wochenende zum Skifahren gehen. Sie halten das für keine gute Idee, da sie sich sicher sind, dass es am kommenden Wochenende sehr voll sein wird und sie sehr lange am Lift warten müssen. Ihr Freund möchte jedoch unbedingt an diesem Wochenende gehen, da es seine letzte Möglichkeit in diesem Winter ist, skifahren zu gehen. Um Sie zu überzeugen verspricht er Ihnen, Ihren Skipass für das Wochenende zu bezahlen, falls in genau 7 von 10 Fällen die Wartezeit länger als 5 Minuten beträgt.
Sie recherchieren ein wenig im Internet und finden heraus, dass an diesem Wochenende die Wahrscheinlichkeit, dass man ≤ 5 Minuten wartet gleich $\frac{1}{3}$ ist und man pro Tag mit einem Skipass 10 mal mit dem Lift fahren kann.

[A] [P] Betrachten Sie nur eine bestimmte Liftfahrt. Die Zufallsvariable, die die Wartezeit dieser Liftfahrt beschreibt besitzt eine Bernoulli-Verteilung. Dabei bedeutet Erfolg, dass man kürzer als 5 Minuten wartet und Misserfolg, dass man länger oder gleich 5 Minuten wartet.

(I) Wie sieht die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion aus? Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine solche handelt.
(II) Berechnen Sie ihren Erwartungswert
(III) Berechnen Sie die Varianz.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie ihr Geld von Ihrem Freund zurück bekommen? (*Hinweis: Sie können annehmen, dass die Wartezeiten für die einzelnen Fahrten voneinander unabhängig sind.*)

(b) Sei nun bei einem Experiment n die Anzahl der Versuche und p die Wahrscheinlichkeit, dass der Versuch gelingt. Dann wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment genau k mal gelingt durch die folgende Funktion beschrieben:

$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Es ist $B_{n,p}(k) = 0$, falls $k \notin \{0, 1, \ldots, n\}$.

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung nennt man Binomialverteilung. Sei X die zugehörige Zufallsvariable.

(i) Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.

(ii) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable X ohne den Erwartungswert für Bernoulli-Verteilte Zufallsvariablen zu verwenden.

(iii) Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariable X. *Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus (A) und die Unabhängigkeit der Wartezeiten.*

Hinweis: Es gilt: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ *(Binomischer Lehrsatz). Außerdem gilt, dass* $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

Aufgabe 5: Catalan-Zahlen und Dyck -Wörter **[15]**

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$

(b) Seien Dyck-Wörter wie in der Vorlesung definiert und bezeichne der Buchstabe a immer eine öffnende Klammer und der Buchstabe b immer eine schließende Klammer.

(i) Zeichnen Sie für die folgenden Wörter ein Klammergebirge:

(I) $abba$ (II) $aabbabab$ (III) $aabaabbb$ (IV) $aababbbab$
(ii) Wie kann man anhand eines Klammergebirges erkennen, ob ein Wort ein Dyck-Wort ist? Welche der Wörter aus (i) sind also Dyck-Wörter?