Der Satz

Bevor wir den Satz formulieren, müssen wir definieren, was ein zusammenhängender Graph ist:

Ein Graph ist *zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Knoten immer einen Weg gibt, d.h. für $u, u' \in V$ existieren $v_0, \ldots, v_n$ so, dass $v_0 = u$, $v_n = u'$ und dass $(v_0, \ldots, v_n)$ ein Weg im Graph ist.

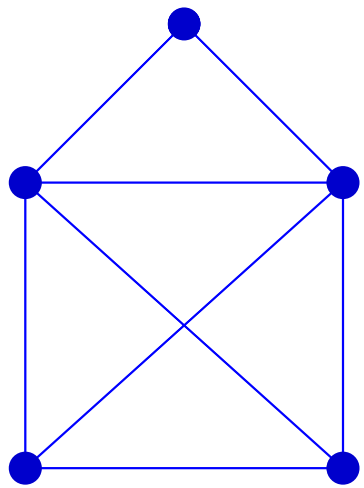
Damit gilt der folgende

Satz: Ein zusammenhängender endlicher Graph $G = (V, E)$ hat genau dann einen Eulerpfad, wenn die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad maximal 2 ist.
Ein Eulerkreis existiert genau dann, wenn alle Knoten geraden Grad haben.

Das Haus vom Nikolaus

Bevor wir den Beweis des Satzes angehen, wollen wir uns ein in Deutschland sehr bekanntes Beispiel betrachten:

Das Haus vom Nikolaus:



Das Haus hat acht Kanten. Der Satz

„Das ist das Haus vom Nikolaus.“

hat acht Silben. Nun soll man das Haus zeichnen, ohne dabei abzusetzen, wobei man den Satz (eine Silbe für jede Kante) laut aufsagt.

Nach dem eben formulierten Satz geht das, denn...

ein Knoten hat Grad 2, zwei haben Grad 4,
aber die beiden Knoten unten haben Grad 3.

Beweis des Satzes

Zuerst prüfen wir, dass jeder Graph der einen Eulerkreis besitzt, zwingend gerade Knotengrade bei jedem Knoten haben muss: Beim Durchlaufen des Kreises wird jeder Knoten genauso oft angesteuert wie er verlassen wird. Jedesmal werden also zwei Kanten gebraucht. Jede Kante muss genau einmal durchlaufen werden. Also ist eine gerade Anzahl Kanten inzident zum Knoten.

Nun sei umgekehrt $G = (V, E)$ ein Graph, bei dem jeder Knoten geraden Grad hat. Wir müssen zeigen, dass ein Eulerkreis existiert.

Dazu wählen wir einen Weg mit maximaler Länge, der jede Kante höchstens einmal durchläuft. Der Weg sei $(v_0, \ldots, v_n)$.

Wir behaupten, dass $v_0 = v_n$ gilt.

Denn sonst gäbe es bei v_n noch eine ungenutzte Kante, durch die der Pfad verlängert werden könnte, im Widerspruch zur Maximalität!

Beweis (Fortsetzung)

Nun haben wir also einen Kreis, der jede Kante höchstens einmal durchläuft. Durchläuft er alle Kanten, sind wir fertig.

Sei nun $\{u, u'\}$ eine nicht durchlaufene Kante.

1. Fall: $u = v_i$ und $u' = v_j$ für zwei Knoten aus dem Kreis.
   Das kann nicht sein, weil dann leicht ein längerer Pfad konstruiert werden kann.

2. Fall: $u = x$ und $u' = v_i$, wobei v_i aus dem Kreis ist, x aber nicht.
   Das kann auch nicht sein – aus dem selben Grund wie im 1. Fall.

3. Fall: $u = x$ und $u' = y$, und x, y gehören beide nicht zum Kreis.
   Weil G zusammenhängend ist, können wir aber einen Weg von x zu einem v_i finden, dessen letzte Kante uns wieder zum 2. Fall führt - also auch unmöglich.

Also ist der gefundene Kreis schon ein Eulerkreis.

Die notwendige Modifikation für den Eulerweg, wenn zwei Knoten ungeraden Grades existieren, ist leicht und wird den Hörern und Hörerinnen zur Übung überlassen.

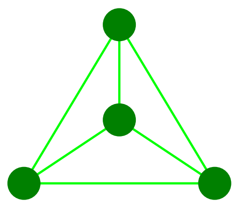
Planare Graphen

Bei der Betrachtung des $K_{3,3}$ ergab sich die Frage, ob man diesen Graph so in die Ebene einzeichnen kann, dass sich die Kanten nicht schneiden. Das motiviert folgende Definition:

> Ein Graph heißt *planar*, wenn er sich so in die Ebene einzeichnen lässt, dass sich die Kanten nicht schneiden.

Zum Beispiel alle P_n und alle C_n sind planar. (Das sollte klar sein.)

Wie sieht es mit den vollständigen Graphen K_n aus?
Der K_2 ist der P_2, der K_3 ist der C_3, also sind beide planar!
Der K_4 ist auch planar:



Auch die Graphen $K_{2,n}$ sind für alle n planar.

Dagegen sind weder der K_5 noch der $K_{3,3}$ planar!
Beweis folgt gleich...