Fibonacci-Zahlen

Benannt nach Sohn des Bonacci: *Filius Bonacci* (um 1200 n.Chr.)

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Die ersten Folgenglieder:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Rekursive Berechnung (Funktion Fib mit Inputparameter n):

IF $n < 2$ RETURN n ELSE RETURN $\mathit{Fib}(n-1) + \mathit{Fib}(n-2)$;

Iterative Berechnung ist geschickter:

Pseudocode bitte selbst entwerfen...

Fibonacci-Zahlen: Interpretation

Es gibt viele Möglichkeiten, Interpretationen für diese Zahlen zu konstruieren oder in Flora und Fauna zu finden.

Die Dominostein-Interpretation:

Es stehen beliebig viele Dominosteine von zwei Sorten zur Verfügung, nämlich solche der Länge 1 und solche der Länge 2.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, damit eine Sequenz der Länge n zu legen?

Länge 1: eine Möglichk., Länge 2: zwei Mögl., Länge 3: drei Mögl.

Für Längen größer als 3: F_{n+1} Möglichkeiten.

Der Beweis durch vollständige Induktion bleibt den Teilnehmern überlassen.

Fibonacci-Zahlen: Abschätzungen

Wir behaupten, dass für alle $n \geq 3$ gilt:

$$F_n \leq 2^n \leq F_{2n}$$

Induktionsanfang für $n = 3$ und $n = 4$: $F_3 \leq 2^3 \leq F_6$ ist korrekt, da $F_3 = 2$, $2^3 = 8$ und $F_6 = 8$ gilt. Ebenso gilt $F_4 \leq 2^4 \leq F_8$, denn $F_4 = 3$, $2^4 = 16$ und $F_8 = 21$.

Induktionsschritt:
Es sei $n \geq 3$ und die Formel gelte für n und $n+1$. Dann:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \leq 2^{n+1} + 2^n < 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

und

$$2^{n+2} = 2 \cdot 2^{n+1} \leq 2F_{2n+2} + F_{2n+1} = F_{2n+2} + F_{2n+3} = F_{2n+4}$$

Anders ausgedrückt: $2^n \leq F_{2n} \leq 2^{2n}$ bzw. $(\sqrt{2})^n \leq F_n \leq 2^n$

Fibonacci-Zahlen und goldener Schnitt

Suche eine Darstellung der Form $F_n = x^n$ für reelle Zahl $x > 0$.

Aus der definierenden Gleichung folgt sofort $x^2 = x + 1$.

Dann liefert die p-q-Formel: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$
bzw. $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

Setzen wir $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\hat{\Phi} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$
und betrachten für Zahlen a und b die Kombination
$F_n(a, b) = a \cdot \Phi^n + b \cdot \hat{\Phi}^n$.

Für jede solche Kombination gilt

$$F_{n+2}(a, b) = F_{n+1}(a, b) + F_n(a, b).$$

Fibonacci-Zahlen und goldener Schnitt (2)

Wie müssen wir a und b wählen?

So, dass $F_0(a, b) = 0$ und $F_1(a, b) = 1$ gilt!

Alle anderen Werte der Fibonacci-Reihe ergeben sich dann von selbst...

Es muss also $a + b = 0$ gelten und $a \cdot \Phi + b \cdot \hat{\Phi} = 1$.

Daraus folgt: $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, und wir erhalten

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Hieraus kann man leicht ableiten, dass F_n die nächstgelegene natürliche Zahl bei

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ist.

Fibonacci-Zahlen und ggT

Der folgende Satz wirkt auf den ersten Blick erstaunlich.

Wir geben ihn hier ohne Beweis an:

Satz:

$$\mathrm{ggT}(F_m, F_n) = F_{ggT(m,n)}$$

Als Beispiel betrachten wir $m = 8$ und $n = 12$.
Der Satz besagt dann (weil $\mathrm{ggT}(8, 12) = 4$):

$$\mathrm{ggT}(F_8, F_{12}) = F_4 = 3$$

Das ist korrekt, denn es gilt $F_8 = 21$ und $F_{12} = 144$, sowie $\mathrm{ggT}(21, 144) = 3$.