Wachstum von $n!$

Wie schnell wächst die Fakultätsfunktion?

Man kann leicht zeigen: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

denn für alle $n \geq 2$ gilt: $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} < n! < n^n$

und daraus folgt die obige Behauptung.

Es gilt aber auch: $e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

(Der Beweis folgt gleich...)

Und sogar: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

(*Stirling-Formel* - hier ohne Beweis)

Beweis der Formel

Zu zeigen ist:

$$e \cdot \left(\tfrac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n \cdot e \cdot \left(\tfrac{n}{e}\right)^n$$

Es gilt $\ln(n!) = \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n)$, also kann das Integral $\int\limits_1^n \ln(x)dx$ nach oben durch $\ln(n!)$ und nach unten durch $\ln((n-1)!)$ abgeschätzt werden.

Die Stammfunktion von $\ln(x)$ ist $x\ln(x) - x + c$, damit erhalten wir für das Integral den Wert

$$n\ln(n) - n + 1$$

und daher: $(n-1)! < e^{n\ln(n)-n+1} < n!$

bzw. $(n-1)! < e \cdot \left(\tfrac{n}{e}\right)^n < n!$

woraus man direkt die Behauptung ableiten kann.

Wachstum der Binomialkoeffizienten

Wir interessieren uns hauptsächlich für Koeffizienten der Form $\binom{2n}{n}$ bzw. für $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ oder $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Beachte hierbei: $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ Warum ist das so?

Damit können wir schließen, dass diese Binomialkoeffizienten im „Durchschnitt“ von der Größenordnung $\frac{2^n}{n}$ sind.

Das ergibt den folgenden Satz:

Satz: Für $n \geq 3$ gilt:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \frac{2^n}{n}$$

Wachstum des kgV

Zunächst definieren wir für natürliche Zahlen n:

$$kgV(n) = kgV(2, \ldots, n).$$

Dann gilt:

$$kgV(n) = \prod_{p \leq n,\ p\ prim} p^{\lfloor \log_p(n) \rfloor}$$

Satz: $kgV(n) > 2^{n-1}$

Für den Beweis brauchen wir ein Zwischenresultat:

Lemma: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ gilt:

$$m\binom{n}{m} \text{ teilt } kgV(n)$$

Beweis des Lemmas

Wir betrachten des Integral $I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}dx$.

Es gilt $x^{m-1}(1-x)^{n-m} = \sum_k (-1)^k \binom{n-m}{k} x^{m-1+k}$.

Also $I = \sum_k (-1)^k \binom{n-m}{k} \int_0^1 x^{m-1+k}dx = \sum_k (-1)^k \binom{n-m}{k} \frac{1}{m+k}$

Daher ist $I \cdot kgV(n)$ eine Summe ganzer Zahlen, und folglich aus $\mathbb{Z}$, aber der Wert ist offensichtlich positiv, damit ist er aus $\mathbb{N}$.

Zeigen wir jetzt, dass $I = \frac{1}{m\binom{n}{m}}$ gilt, dann ist das Lemma bewiesen.

Wir führen eine Induktion über die Größe $n-m$ durch.

Induktionsanfang $m = n$:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx = \frac{1}{m} = \frac{1}{m\binom{n}{m}}.$$

Induktionsschritt

Für den Induktionsschritt benutzen wir *partielle Integration*:

$$\int u'v = uv - \int v'u$$

Wir setzen $u = \frac{1}{m}x^m$ und $v = (1-x)^{n-m}$.

Dann folgt $u' = x^{m-1}$ und $v' = -(n-m)(1-x)^{n-m-1}$.

Aufgrund unserer Wahl gilt $I = \int u'v = uv - \int v'u$ und mit $u(1) \cdot v(1) = u(0) \cdot v(0) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{n-m}{m} x^{(m+1)-1}(1-x)^{n-(m+1)}dx \\ &= \frac{n-m}{m} \int_0^1 x^{(m+1)-1}(1-x)^{n-(m+1)}dx \\ &= \frac{n-m}{m} \cdot \frac{1}{(m+1)\binom{n}{m+1}} = \frac{1}{m\binom{n}{m}} \end{aligned}$$

Nutze Induktions-
voraussetzung

Damit ist das Lemma bewiesen.