kgV: Zum Beweis des Satzes

Wir wollen zeigen, dass für $n \geq 3$ gilt: $kgV(n) > 2^{n-1}$.

Klar ist: $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \frac{2^n}{n}$, also folgt $\frac{n}{2} \cdot \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq 2^{n-1}$

Mit dem Lemma erhalten wir nun:

$$kgV(n) \geq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \cdot \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \tfrac{n}{2} \cdot \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq 2^{n-1}$$

Tatsächlich gilt sogar:

$$2^n < kgV(n) \leq 4^{n-1}$$

Die erste Ungleichung ist etwas schwerer zu zeigen als unser Satz, und sie gilt tatsächlich auch erst ab $n = 7$.

Benutze hier $\frac{n}{2} \leq m \leq n \implies kgV(n)$ teilt $kgV(m) \cdot \binom{n}{m}$. Leicht zu sehen

Es folgt $kgV(2m) \leq kgV(m) \cdot \binom{2m}{m} \leq kgV(m) \cdot 4^m \leq 4^{2m-1}$

Der Fall für ungerade Zahlen geht ähnlich - bitte selbst versuchen...

Primzahldichte

Wir setzen $\pi(n)$ = Anzahl der Primzahlen p mit $1 < p \leq n$.

Es gilt $kgV(n) = \prod_{p \leq n,\ p\ prim} p^{\lfloor \log_p n \rfloor} \leq \prod_{p \leq n,\ p\ prim} n = n^{\pi(n)}$.

Und mit $kgV(n) > 2^n$ folgt hieraus für alle $n \geq 4$:

$$\pi(n) \geq \frac{n}{\log_2 n}$$

Andererseits wissen wir:

$$\prod_{p \leq n,\ p\ prim} p \leq kgV(n) \leq 4^{n-1}$$

und für alle $t \leq n$

$$t^{\pi(n)-\pi(t)} \leq \prod_{t < p \leq n,\ p\ prim} p \leq kgV(n) < 4^n$$

Primzahldichte, Fortsetzung

Wir hatten: $t^{\pi(n)-\pi(t)} \leq \prod_{t<p\leq n,\ p\ prim} p \leq kgV(n) < 4^n = 2^{2n}$

Es folgt: $(\pi(n) - \pi(t)) \cdot \log_2 t < 2n$

Also: $\pi(n) \cdot \log_2 t < 2n + \pi(t) \cdot \log_2 t \leq 2n + t \cdot \log_2 t$

Und damit: $\pi(n) < \frac{2n}{\log_2 t} + t$

Nun setzen wir $t = \frac{n}{(\log_2 n)^2}$ und erhalten

$$\pi(n) < \frac{2n}{\log_2 n - 2\log_2\log_2 n} + \frac{n}{(\log_2 n)^2}$$

Schließlich stellen wir fest, dass der letzte Ausdruck asymptotisch gegen die Summe $\frac{2n}{\log_2 n} + \frac{n}{(\log_2 n)^2}$ strebt, die nach oben durch $\frac{(2+\varepsilon)n}{\log_2 n}$ abgeschätzt werden kann.

Satz über die Primzahldichte

Wir fassen das gezeigte in einem Satz zusammen:

Satz: $$\frac{n}{\log_2 n} \leq \pi(n) \leq \frac{(2+\varepsilon)n}{\log_2 n}$$

Tatsächlich weiß man, dass $\pi(n)$ asymptotisch wächst wie

$$\frac{n}{\ln n} = \log_2 e \cdot \frac{n}{\log_2 n}$$

Dabei ist $\log_2 e$ ungefähr der Wert 1,4.

Bertrand'sches Postulat

Der folgende Satz wird als das *Bertrand'sche Postulat* bezeichnet:

Satz: Für alle $n \geq 1$ existiert eine Primzahl p, so dass

$$n < p \leq 2n$$

Für $n \leq 4048$ kann man das durch Anschauen der Liste aller Primzahlen bis zu diesem Wert leicht überprüfen.

Sei nun also $n > 4048$.

Wir schreiben $n = \prod_p p^{e_p(n)}$ und verwenden $n\binom{2n}{n} | kgV(2n)$.

Es folgt $e_p(\binom{2n}{n}) \leq e_p(kgV(2n)) \leq \log_p(2n)$, also $p^{e_p(\binom{2n}{n})} \leq 2n$.

Also gilt für jede Primzahl p mit $p > \sqrt{2n}$, dass $e_p(\binom{2n}{n}) \in \{0, 1\}$.

Bertrand'sches Postulat (Forts.)

Für jede Primzahl p mit $p > \sqrt{2n}$ gilt $e_p(\binom{2n}{n}) \in \{0, 1\}$.
Aber wenn $\frac{2}{3}n < p \leq n$, dann ist sogar nur die 0 möglich!

Es folgt: $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (\prod 2n) \cdot (\prod p) \cdot (\prod p)$.

Hierbei läuft das erste Produkt über alle $p \leq \sqrt{2n}$, das zweite über $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$ und das letzte über $n \leq p \leq 2n$.

Daher folgt $2^{2n} = 4^n \leq 2n \cdot (2n^{\sqrt{2n}-1}) \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p$.

Nun setzen wir $m = 2n$ und teilen durch 2^m. Das ergibt:

$$1 \leq m^{\sqrt{m}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}m} \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p$$

bzw.

$$2^{\frac{1}{3}m-\sqrt{m}\log m} \leq \prod_{n<p\leq 2n} p$$

Bei genügend großem m ist die linke Seite größer 1