Aufgabe 2.1 (a)

Beweis der Bernoulli-Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für } x \geq -1,\ n \geq 0$$

Wir beweisen das (natürlich) per vollständiger Induktion:

Induktionsanfang ($n = 0$):

$$(1+x)^0 = 1 \qquad 1 + 0 \cdot x = 1 \qquad \text{passt!}$$

Induktionsschritt ($n \geq 1$):

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x^{n-1}) \geq (1+x)(1+(n-1)x) =$$

$$= 1 + nx + (n-1)x^2 \geq 1 + nx$$

Aufgabe 2.2

Gegeben seien zwei sortierte Sequenzen der Länge n,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \qquad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

sowie eine Permutation π auf den Zahlen $\{1, \ldots, n\}$. Damit sei

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\pi(i)}$$

Man soll zeigen, dass für $\pi = id$ der Wert $S(\pi)$ maximal wird, und für die Permutation $\pi = \rho$ mit $\rho(i) = n + 1 - i$ minimal.

Lösung:

Es seien π_1 und π_2 zwei Permutationen, die überall übereinstimmen, außer an den Stellen i und $i + 1$. Dort gelte:

$$\pi_1(i) = \pi_2(i + 1) \text{ und } \pi_1(i + 1) = \pi_2(i).$$

Aufgabe 2.2 (Forts.)

Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
S(\pi_2) - S(\pi_1) &= \sum_{j=1}^{n} a_j b_{\pi_2(j)} - \sum_{j=1}^{n} a_j b_{\pi_1(j)} \\
&= a_i b_{\pi_2(i)} + a_{i+1} b_{\pi_2(i+1)} - a_i b_{\pi_1(i)} - a_{i+1} b_{\pi_1(i+1)} \\
&= a_i b_{\pi_1(i+1)} + a_{i+1} b_{\pi_1(i)} - a_i b_{\pi_1(i)} - a_{i+1} b_{\pi_1(i+1)} \\
&= (a_{i+1} - a_i)(b_{\pi_1(i)} - b_{\pi_1(i+1)})
\end{aligned}
$$

Da $a_{i+1} - a_i \geq 0$ gilt, heißt das:

Falls $b_{\pi_1(i)} - b_{\pi_1(i+1)} > 0$, dann ist $S(\pi_2) - S(\pi_1) \geq 0$.

Damit ist klar: Wenn man, ausgehend von einer beliebigen Permutation π, durch sukzessives Vertauschen benachbarter Elemente des b-Feldes zu einer Sortierung kommt (also zu $\pi = id$), dann ist am Schluss $S(\pi)$ maximal. Minimalität von $S(\rho)$ folgt analog.

Zusammenfassung: Begriffe

Im Abschnitt 2.2 wurden folgende Begriffe eingeführt:

Fakultätsfunktion $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

$kgV(n) = kgV(2, \ldots, n)$

Primzahl-Zählfunktion $\pi(n) = |\{p \leq n \mid p \text{ ist Primzahl}\}|$.

Primzahlzertifikat

Bertrand-Postulat

Resultate (1)

Abschätzung der Fakultätsfunktion, gezeigt:

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

und ohne Beweis: Stirling-Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Integralmethode für Abschätzungen

Durchschnittswert (bzgl. k) der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ist $\frac{2^n}{n}$.

Maximale Binomialkoeffizienten (für festes n) sind bei $k \sim \frac{n}{2}$.

Und deshalb gilt:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \frac{2^n}{n}$$

Resultate (2)

Es gilt $kgV(n) > 2^{n-1}$ und $m \cdot \binom{n}{m}$ teilt $kgV(n)$.

Für alle $n \geq 7$ gilt: $2^n < kgV(n) \leq 4^{n-1}$.

Primzahldichte:

$$\frac{n}{\log_2 n} \leq \pi(n) \leq \frac{(2+\varepsilon)n}{\log_2 n}$$

(Die tatsächliche Primzahldichte ist rund $\frac{1.4 \cdot n}{\log_2 n}$.)

Bertrand'sches Postulat:

Für alle $n \geq 1$ existiert eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.