Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, Gleichverteilung

Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist eine Menge Ω, (endlich oder abzählbar), zusammen mit einer Abbildung $Pr : \Omega \to [0,1]$ mit

$$\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = 1$$

Für ein $\omega \in \Omega$ nennt man $Pr(\omega)$ die

Wahrscheinlichkeit von ω.

Wichtiger Sonderfall:

Wenn Ω endlich ist und für alle $\omega \in \Omega$ gilt: $Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|}$, dann spricht man von einer *Gleichverteilung.*

Ereignisse, Zufallsvariablen

Als *Ereignis* bezeichnet man eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A *eintritt*, ist

$$Pr[A] = \sum_{\omega \in A} Pr[\omega]$$

Im Fall der Gleichverteilung ist $Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|}$ für alle ω, also:

$$Pr[A] = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl „gute“ Fälle}}{\text{Anzahl aller Fälle}}$$

Eine *Zufallsvariable* ist eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Erwartungswert

Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir den *Erwartungswert* $E[X]$ wie folgt:

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr[\omega]$$

Bei endlichem Ω ist diese Summe immer definiert. Dagegen muss man in unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen hierbei absolute Konvergenz verlangen!

Für Gleichverteilung ergibt sich: $E[X] = \frac{1}{|\Omega|} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)$

Ein Ereignis A kann als Zufallsvariable interpretiert werden, indem wir es mit der durch die charakteristische Funktion χ_A definierten Zufallsvariable identifizieren. (Hier: $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$, sonst)

Dann gilt:

$$Pr[A] = \sum_{\omega \in A} Pr[\omega] = \sum_{\omega \in \Omega} \chi_A(\omega) \cdot Pr[\omega] = E[\chi_A]$$

Wahrscheinlichkeit von $X = x$

Für eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable X bietet es sich an, das folgende Ereignis zu betrachten:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \;\; = X^{-1}(x)$$

Dieses Ereignis nennen wir „$X = x$“ und erhalten:

$$Pr[X = x] = Pr[X^{-1}(x)] = Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}]$$

Damit kann man den Erwartungswert für X auch als die folgende Summe angeben:

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot Pr[X = x]$$

Natürlich kommen in dieser Summe nur höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Summanden vor.

Markov-Ungleichung

Ein wichtiges Hilfsmittel bei Aussagen über Wahrscheinlichkeiten ist die Markov-Ungleichung:

Satz: Sei X eine Zufallsvariable mit $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, und sei $E[X] > 0$. Dann gilt:

$$\forall \lambda > 0 : \; Pr[X \geq \lambda \cdot E[X]] \leq \frac{1}{\lambda}$$

Also völlig unabhängig davon, welches Zufallsexperiment wir gerade betrachten: Dass man zufällig über das Doppelte des Erwartungswertes hinauskommt, wird höchstens mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit passieren. Und den Erwartungswert verzehnfachen kann man höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Zehntel!

Beweis der Markov-Ungleichung

Wir haben streng genommen noch nicht definiert, was $Pr[\,X \geq \lambda E[X]\,]$ überhaupt bedeutet.

Es ist $Pr[A]$ für die Menge $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq \lambda E[X]\}$.

Damit können wir nun die Markov-Ungleichung beweisen:

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr[\omega] \geq \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq \lambda E[X]}} X(\omega) \cdot Pr[\omega] \geq$$

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq \lambda E[X]}} \lambda E[X] \cdot Pr[\omega] = \lambda E[X] \cdot Pr[\,X \geq \lambda E[X]\,]$$

Division beider Seiten durch $\lambda E[X]$ gibt das gewünschte Ergebnis.