Linearität des Erwartungswertes

Für zwei Zufallsvariablen X und Y und zwei reelle Zahlen a, b kann man eine weitere Zufallsvariable $aX + bY$ definieren durch

$$(aX + bY)(\omega) = a \cdot X(\omega) + b \cdot Y(\omega)$$

Hierbei handelt es sich also um eine Linearkombination der beiden gegebenen Zufallsvariablen X und Y. Auch $aX + bY$ ist dann eine Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$.

Der Satz sagt, dass der Erwartungswert einer Linearkombination als Linearkombination der Erwartungswerte zu berechnen ist:

Satz: $E[aX + bY] = a \cdot E[X] + b \cdot E[Y]$

Beweis des Satzes

Es gilt

$$\begin{aligned}
E[aX+bY] &= \sum_{\omega\in\Omega}(aX+bY)(\omega)Pr[\omega] \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}(aX(\omega)+bY(\omega))Pr[\omega] \\
&= a(\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\cdot Pr[\omega]) + b(\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)\cdot Pr[\omega]) \\
&= a\cdot E[X] + b\cdot E[Y]
\end{aligned}$$

Unabhängige Zufallsvariablen

Es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen. Wir sagen, dass X und Y *unabhängige* Zufallsvariablen sind, falls

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad Pr[X = x \wedge Y = y] = Pr[X = x] \cdot Pr[Y = y]$$

Satz: Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Definition der Unabhängigkeit von X und Y; die Details bleiben den interessierten Teilnehmern überlassen.

Varianz

Als Varianz der Zufallsvariablen X bezeichnet man den Erwartungswert des Quadrats der Differenz von X und $E[X]$:

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[(X - E[X])^2] && \text{Quadrat ausrechnen} \\
&= E[X^2 - 2 \cdot E[X]\,X + E[X]^2] && \text{Erwartungswert linear} \\
&= E[X^2] - 2 \cdot E[X] \cdot E[X] + E[X]^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2
\end{aligned}
$$

Insbesondere kann man daraus schließen, dass der Erwartungswert des Quadrats mindestens so groß ist wie das Quadrat des Erwartungswerts.

Additivität der Varianz

Satz: Wenn X und Y unabhängige Zufallsvariablen sind, dann gilt:

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$$

Beweis: Wir müssen benutzen, dass $E[XY] = E[X]\,E[Y]$ gilt:

$$\begin{aligned}
Var[X+Y] &= E[(X+Y)^2] - E[X+Y]^2 \\
&= E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X] + E[Y])^2 \\
&= E[X^2] + 2E[X]E[Y] + E[Y^2] \\
&\qquad - E[X]^2 - 2E[X]E[Y] - E[Y]^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2 + E[Y^2] - E[Y]^2 \\
&= Var[X] + Var[Y]
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

Ein Jäger hat Treffsicherheit 50%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 10 Schüssen mindestens dreimal trifft?

Lösung:

W'keit, dass er 10 mal daneben schießt: $\frac{1}{2^{10}}$

W'keit für 9 mal daneben und einmal treffen: $\frac{10}{2^{10}}$

W'keit für 8 mal daneben und zweimal treffen: $\frac{45}{2^{10}}$

In allen übrigen Fällen trifft der Jäger mindestens dreimal.

Also ergibt sich: $\frac{2^{10}-56}{2^{10}} = \frac{968}{1024}$, das heißt fast 95%.