Kombinatorik

SPIELEN mit Zahlen...

In dieser Einheit spielen wir mit:

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

und

Partitionszahlen.

Auf wieviele Arten kann man n als Summe von k positiven ganzen Zahlen schreiben? Diese Anzahl nennen wir $P(n, k)$.

Die nächste Einheit wird sich dann mit den *Catalan-Zahlen* und deren Bezug zu *Dyck-Wörtern* beschäftigen.

Binomialkoeffizienten

Binomialkoeffizienten tauchen im Besonderen immer dann auf, wenn als *Zufallsexperiment* von n Kugeln zufällig k Kugeln gezogen werden, z.B. im Sport oder bei Lotterien.

1. Variationsmöglichkeit: Werden gezogene Kugeln zurückgelegt?

2. Variationsmöglichkeit: Kommt es auf die Reihenfolge an, in der die Kugeln gezogen werden?

Satz: Werden k aus n Kugeln mit Zurücklegen gezogen, so gibt es n^k mögliche Ergebnisse mit Reihenfolge, bzw. $\binom{n+k-1}{k}$ mögliche Ergebnisse ohne Reihenfolge.
Ohne Zurücklegen sind es $k! \cdot \binom{n}{k}$ mögliche Ergebnisse mit Reihenfolge bzw. $\binom{n}{k}$ ohne Reihenfolge.

Beweis des Satzes

Die Fälle „mit/mit“ und „ohne/ohne“ sind klar.

Mit Reihenfolge, aber ohne Zurücklegen:

Zunächst wie im Fall „ohne/ohne“. Aber dann gibt es $k!$ Möglichkeiten, die k gezogenen Kugeln anzuordnen.

Ohne Reihenfolge, aber mit Zurücklegen:

Wichtig ist nur, wie oft jede Kugel gezogen wird.

Das Ergebnis ist also eine Folge $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = k$.

Ein solches Ergebnis stellen wir in der folgenden Form dar:

$$1^{a_1}01^{a_2}01^{a_3} \ldots 1^{a_{n-1}}01^{a_n}$$

Also durch einen 0-1-String mit k Einsen und $n-1$ Nullen. D.h., wir haben einen String der festen Länge $n+k-1$, in dem die $n-1$ Positionen der Nullen das Ergebnis festlegen. Hierfür gibt es $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten.

Partitionszahlen

Wird eine n-elementige Menge in k nichtleere Teilmengen zerlegt, erzeugt das immer eine Aufteilung von n als Summe

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

wobei n_i die Größe des i-ten Teils ist. Wir ordnen die n_i so an, dass für alle i gilt: $n_i \geq n_{i+1} \geq 1$.

Die *Partitionszahl* $P(n, k)$ definieren wir jetzt als die Anzahl verschiedener Möglichkeiten, n auf diese Weise in k Summanden zu zerlegen.

So gilt zum Beispiel $P(7, 3) = 4$, denn 7 lässt sich auf folgende vier Arten in drei Summanden zerlegen:

5+1+1 4+2+1 3+3+1 3+2+2

$P(n)$ sei die Summe $\sum_k P(n, k)$.

Was ist $P(7)$?

Rekursionsformel für Partitionszahlen

Es gilt:

Satz:
$$\begin{aligned} P(n,k) &= P(n-1,k-1) + P(n-k,k) \\ &= \sum_{j\le k} P(n-k,j) \\ &= \sum_{j\ge 0} P(n-jk-1,k-1) \end{aligned}$$

Für $k \ge \frac{n}{2}$ gilt außerdem: $P(n,k) = P(n-k)$.

Beweis: Wir überlegen uns zuerst die letzte Behauptung. Alle k Summanden sind größer als 0, d.h. wenn wir zunächst k mal eine 1 legen, bleibt noch die Teilsumme $n-k$ zu verteilen. Dafür gibt es $P(n-k)$ Möglichkeiten.

Wieso muss man hier $k \ge \frac{n}{2}$ fordern?

Beweis

Nun zur ersten Aufteilung:

Die Summendarstellungen $n = n_1 + \cdots + n_k$ können wir in zwei Fälle unterteilen, nämlich für $n_k = 1$ und $n_k \geq 2$. Wenn $n_k = 1$ ist, ist noch $n-1$ auf die ersten $k-1$ Zahlen zu verteilen. Dafür gibt es $P(n-1, k-1)$ Möglichkeiten. Wenn aber $n_k > 1$ gilt, dann ist noch $n-k$ auf k Summanden zu verteilen. Daraus die Beh.

Die erste Summendarstellung folgt aus dieser Zerlegung iterativ:

$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k) = P(n-2,k-2) + P(n-k,k-1) + P(n-k,k) = \ldots$$

Hierbei wurde immer ein $P(n-j, k-j)$ weiter zerlegt. Wenn wir stattdessen das $P(n-k, k)$ weiter zerlegen, erhalten wir die zweite Summendarstellung:

$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k-1,k-1) + P(n-2k,k) = \ldots$$

Das komplettiert den Beweis.