Cliquen und unabhängige Mengen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, d.h. $E \subseteq \binom{V}{2}$. Für Teilmengen $U \subseteq V$ bezeichnet man mit G_U den *induzierten Teilgraph* $G_U = (U, E_U)$, wobei $E_U := E \cap \binom{U}{2}$ ist.

Eine *Clique* ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $E_U = \binom{U}{2}$, das heißt, es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$. In diesem Fall ist G_U ein vollständiger Graph!

Eine *unabhängige Menge* U im Graph $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $E_U = \emptyset$. Hier ist G_U ein kantenloser Graph.

Welches sind die größten Cliquen in P_n, C_n, K_n und $K_{m,n}$?
Antwort: In P_n höchstens Größe 2, in C_n meist auch, nur C_3 ist eine Ausnahme.
In K_n ist der ganze Graph eine Clique, in $K_{m,n}$ wieder nur Größe 2.

Und wie steht es mit unabhängigen Mengen in diesen Graphen?
Antwort bitte selbst überlegen...

Der Satz von Ramsey

Es gibt viele Versionen des Satzes von Ramsey, denn man kann zunächst den endlichen vom unendlichen Fall unterscheiden, aber zusätzlich gibt es auch die Unterscheidung, ob man nur über *normale* Graphen mit Kanten und „Nichtkanten“ spricht, oder ob man beliebige Kantenfärbungen betrachtet. Und schließlich kann man statt Kanten, also Elementen von $\binom{V}{2}$, auch sogenannte *k-Hyperkanten*, also Elemente von $\binom{V}{k}$ betrachten.

Wir beweisen hier die *Basisversion*, also den folgenden Satz:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph mit N Knoten eine Clique der Größe n oder eine unabhängige Menge der Größe n enthält.

Ramsey für $n = 3$

Zum Eingewöhnen beweisen wir den Satz jetzt für den Fall $n = 3$. Wir können $N = 6$ wählen und zeigen, dass dieser Wert optimal ist:

Beh.: Jeder Graph mit 6 Knoten enthält entweder eine Clique der Größe 3 oder eine unabhängige Menge der Größe 3. Für Graphen mit 5 Knoten ist das nicht der Fall.

Für den Beweis nehmen wir zunächst an, dass ein Knoten v mit mindestens drei Kanten existiert. Die Nachbarknoten seien u_1, u_2, u_3. Falls diese eine unabhängige Menge bilden, sind wir fertig. Andernfalls gibt es eine Kante zwischen einem u_i und einem u_j (mit $i \neq j$). Dann bilden v, u_i, u_j eine Clique der Größe 3.

Gibt es keinen solchen Knoten, dann hat jeder Knoten drei nichtbenachbarte Knoten! Auch hier betrachten wir einen Knoten v mit drei Nichtnachbarn u_1, u_2, u_3. Bilden diese drei Knoten eine Clique, sind wir fertig. Andernfalls gibt es $i \neq j$ so, dass u_i und u_j nicht benachbart sind. Dann sind v, u_i, u_j eine unabhängige Menge.

Zur Optimalität: C_5 hat 5 Knoten und weder Clique noch unabh. Menge der Größe 3.

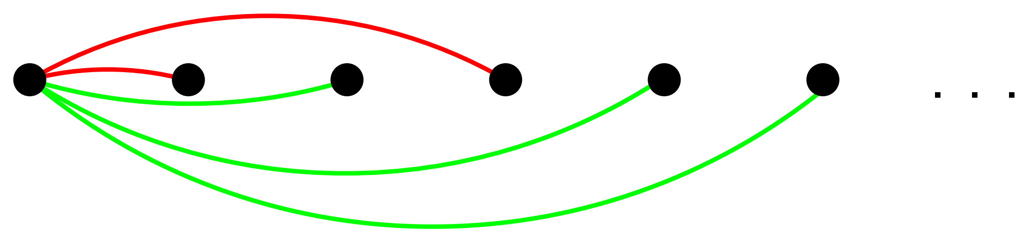
Ramsey für $n = 4$

Wir behaupten, dass jeder Graph mit 32 Knoten eine Clique oder eine unabhängige Menge der Größe 4 enthält. Die Zahl 32 ist hier bei weitem nicht optimal (18 wäre die tatsächliche Schranke).

Wir verwenden Graphen mit roten und grünen Kanten (anstelle der ursprünglichen Kanten und Nichtkanten), so können wir immer von einem vollständigen Graph ausgehen.

Wir reihen die 32 Knoten waagerecht auf und ziehen rote Kanten als Bögen oberhalb und grüne unterhalb der Reihe, allerdings zunächst nur für die Kanten, die vom ersten Knoten ausgehen:

Beispiel



Beweis zum Fall $n = 4$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1) Mindestens 16 rote Kanten vom ersten Knoten nach rechts.
2) Mindestens 16 grüne Kanten vom ersten Knoten nach rechts.

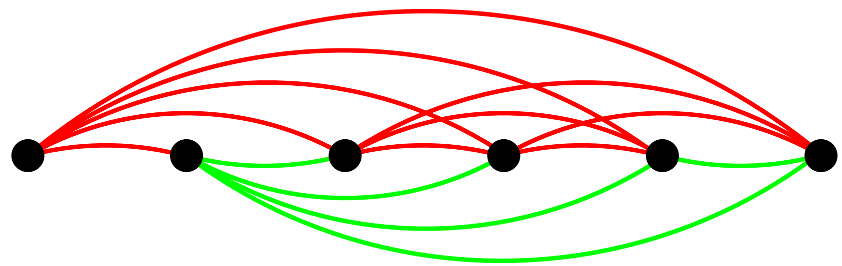
In jedem Fall erreichen wir durch Streichen von 15 Knoten, dass alle beim ersten Knoten beginnenden Kanten gleichfarbig sind.

Wir haben jetzt noch 17 Knoten, von denen wir den ersten ab jetzt unberührt lassen. Vom zweiten Knoten aus nach rechts machen wir das gleiche Spiel wieder. Von den 15 nach rechts gehenden Kanten sind mindestens 8 gleichfarbige. Wir streichen 7 Knoten mit dem Resultat, dass jetzt auch alle vom zweiten Knoten aus nach rechts gehenden Kanten gleichfarbig sind.

Aber Vorsicht: Die Kante vom zweiten Knoten nach links muss nicht dieselbe Farbe haben wie die Kanten nach rechts.

Beweis (Abschluss

Wir haben jetzt noch 10 Knoten. Der erste hat nur Kanten einer Farbe. Der zweite hat nach rechts hin auch nur Kanten einer Farbe (die nicht dieselbe sein muss...) Der dritte Knoten hat noch sieben Kanten nach rechts hin, wovon mindestens vier dieselbe Farbe haben. Wir streichen 3 Knoten und behalten insgesamt sieben.
Im nächsten Schritt streichen wir einen der drei am rechten Rand liegenden Knoten.
Nun könnte die Situation wie folgt aussehen:



Generell haben immer drei der ersten fünf Knoten die gleiche Farbe bei den nach rechts gehenden Kanten (hier rot). Diese zusammen mit dem Knoten rechts ergeben die gesuchte einfarbige Clique.