Beweis des Satzes von Ramsey

Wir wiederholen noch einmal die Aussage des Satzes:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph mit N Knoten eine Clique der Größe n oder eine unabhängige Menge der Größe n enthält.

Zum Beweis wollen wir das Prinzip vom Fall $n = 4$ verallgemeinern.

Wir wissen allerdings noch nicht, welches N wir (in Abhängigkeit von n) wählen müssen, also sagen wir, es sind N Knoten, und heben uns die Bestimmung von N für später auf.

Aussieben

Wir reihen zunächst alle N Knoten nebeneinander auf, beginnend mit v_1, v_2 usw. bis zu v_N.

Nun beginnen wir immer mit dem ersten noch nicht vorher bearbeiteten (und auch nicht gestrichenen) Knoten – im ersten Schritt also v_1 – und streichen maximal die Hälfte der rechts davon liegenden Knoten, um alle nach rechts gehenden Kanten des betrachteten Knotens gleichfarbig zu bekommen.

Jeder überlebende Knoten bekommt die Farbe der von ihm aus nach rechts gehenden Kanten als seine „Rechtsfarbe“ zugeordnet.

Von den am Ende bleibenden Knoten haben mindestens die Hälfte die gleiche Rechtsfarbe. Die übrigen werden gestrichen und es verbleibt eine Clique mit einfarbigen Kanten.

Wieviele Knoten überleben?

Bei dem beschriebenen Vorgang wurde in jedem Durchgang ein Knoten endgültig *gerettet*, und die zu betrachtenden Restknoten waren noch mindestens halb so viele wie vorher.

Nach dem Aussieben sind also zunächst mindestens $\log_2 N$ viele Knoten übrig, von denen wir noch einmal maximal die Hälfte entfernen. Es bleiben also mindestens $\frac{1}{2} \log_2 N$ Knoten übrig, die unsere gesuchte einfarbige Clique bilden.

Wenn wir mit $N = 2^{2n}$ Knoten starten, haben wir also gezeigt, dass eine Clique (oder unabhängige Menge) der Größe n im ursprünglichen Graph enthalten war.

Die Zahl $N = 2^{2n}$ ist sehr unscharf, in Wahrheit genügen weit weniger Knoten, allerdings wächst N tatsächlich exponentiell in n.

Ramsey-Zahlen

Als n-te Ramsey-Zahl $R(n)$ bezeichnen wir die kleinste Zahl N, so dass jeder Graph mit mindestens N Knoten eine Clique oder eine unabhängige Menge der Größe n hat.

Wir haben gesehen, dass $R(3) = 6$ gilt.

Es ist auch bekannt, dass $R(4) = 18$ gilt.

$R(5)$ ist nach wie vor unbekannt. Man weiß nur:

$$43 \leq R(5) \leq 48$$

Welche Werte haben eigentlich $R(2)$ und $R(1)$?

Kleine Denksportaufgabe: Geben Sie einen Graph mit 10 Knoten an, der weder eine Clique noch eine unabhängige Menge der Größe 4 enthält.

Ramsey unsymmetrisch

Man kann auch fragen, wie groß ein Graph gewählt werden muss, damit garantiert werden kann, dass er entweder eine Clique der Größe m oder eine unabhängige Menge der Größe n enthält.

Die entsprechende Zahl nennt man $R(m, n)$.

Es gilt offensichtlich $R(m, n) = R(n, m)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Können Sie das begründen?

Die Zahlen $R(1, n) = R(n, 1)$ sind trivial...

Wie groß sind $R(2, n) = R(n, 2)$?

Können wir auch noch etwas über $R(3, n) = R(n, 3)$ sagen?

Ramsey mit Hypergraphen und vielen Farben

Wie schon angedeutet, kann man eine analoge Aussage zum von uns gezeigten Ergebnis auch für Hypergraphen und für eine beliebige (endliche) Zahl von Farben beweisen:

Satz: Für alle $k, c, n \in \mathbb{N}$ existiert eine kleinste Zahl $R_{k,c}(n) \in \mathbb{N}$, so dass gilt: In jeder Menge V mit $|V| \geq R_{k,c}(n)$ gibt es bzgl. jeder Färbung $f : \binom{V}{k} \to C$ mit $|C| = c$ eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| = n$ und f ist konstant auf $\binom{X}{k}$.