Übungsblatt 1

Punkte: 50

Hertrampf, Mendel
FMI/TI, FMI/ALG
Universität Stuttgart

Aufgabe 1: Landau-Symbole **[10]**

Eine Möglichkeit die Landau-Symbole zu definieren besteht darin, Limes superior und Limes inferior zu verwenden. Diese sind folgendermaßen definiert:

Definition (lim sup, lim inf, lim). *Sei* $\mathbb{R}^+ = \{r \mid r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$ *und sei* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *eine Funktion. Wir identifizieren diese Funktion mit der Folge* $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *und vereinbaren, dass* ∞ *ein Häufungspunkt von* f *ist, falls* f *unbeschränkt ist.*

Mit $\limsup_{n\to\infty} f(n)$ *wird der* Limes superior *von* f *bezeichnet. Dies ist der* ***größte*** *Häufungspunkt der Folge* f.

Analog bezeichnet $\liminf_{n\to\infty} f(n)$ *den* Limes inferior *von* f. *Dies ist der* ***kleinste*** *Häufungspunkt der Folge* f.

Schließlich bezeichnet $\lim_{n\to\infty} f(n)$ *den* Limes *von* f. *Besitzt die Folge* f ***genau einen*** *Häufungspunkt, so ist dieser der Limes von* f*; andernfalls ist der Limes undefiniert.*

Man beachte: Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(n)$, so stimmt er mit dem Limes superior von f und dem Limes inferior von f überein.

Die Landau-Symbole $\mathcal{O}$, o, Ω, ω und Θ können auf verschiedene Arten definiert werden:

Definition 1 (Landau-Symbole). *Seien* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ = \{r \mid r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$ *Funktionen. Dann gilt:*

$$f \in \mathcal{O}(g) \iff \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \qquad f \in o(g) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f \in \Omega(g) \iff \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \qquad f \in \omega(g) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

$$f \in \Theta(g) \iff f \in \mathcal{O}(g) \text{ und } f \in \Omega(g)$$

Definition 2 (Landau-Symbole (Alternative)). *Seien* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *Funktionen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{O}(g) &\iff \exists c > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n) \\
f \in o(g) &\iff \forall c > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n) \\
f \in \Omega(g) &\iff \exists c > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n) \\
f \in \omega(g) &\iff \forall c > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)
\end{aligned}$$

(a) [P] Zeigen Sie die Äquivalenz der Definitionen für $\mathcal{O}$.

(b) [10] Zeigen Sie die Äquivalenz der Definitionen für o.

Aufgabe 2: Wachstum 1 **[20]**

Seien $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ beliebige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) [P] Ist $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h)$, dann ist $f \in \mathcal{O}(h)$.

(b) [5] Ist $f \in o(g)$ und $g \in o(h)$, dann ist $f \in o(h)$.

(c) [5] Ist $f, g \in \mathcal{O}(h)$, $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$, dann ist auch $\lambda f + \rho g \in \mathcal{O}(h)$.

(d) [5] Für alle festen $k \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ gilt $n^k \in o(a^n)$.

(e) [5] Für alle festen $r, \ell \in \mathbb{R}$ mit $\ell > 0$ gilt $(\log n)^r \in o(n^\ell)$.

Dabei sind Multiplikation und Addition von Funktionen punktweise zu verstehen.

Hinweis zu (iv) *und* (v)*:* Verwenden Sie die Regel von de l'Hôpital.

Aufgabe 3: Wachstum 2 **[10]**

Ordnen Sie folgende Funktionen ihrem asymptotischen Wachstum nach aufsteigend und begründen Sie Ihre Anordnung:

$$a(n) = \log(n)^2 \qquad b(n) = \sqrt{n} \qquad c(n) = \frac{n^5}{\log n}$$
$$d(n) = 2^{n/2} \qquad e(n) = 30n^2 + 5\log n \qquad f(n) = (\log n)^{\log n}$$

In der Übung wird gezeigt, dass gilt: $a \in o(b)$

Aufgabe 4: Rekursion **[10]**

(a) [P] Closest-Pair Problem

Das Closest-Pair Problem ist wie folgt definiert:

Auf Eingabe einer Punktmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ suchen wir die zwei Punkte mit dem geringsten Abstand.

Entwerfen Sie einen Divide & Conquer Algorithmus, der das Problem in Zeit $\mathcal{O}(|\mathcal{P}| \log |\mathcal{P}|)$ löst.

(b) [10] Matchings in Bäumen

Ein Matching auf einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge der Kanten $M \subseteq E$, sodass $\{u, v\}, \{w, x\} \in M$ impliziert $\{u, v\} \cap \{w, x\} = \emptyset$, d. h. dass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Endknoten haben.

Beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus für folgendes Problem:

Eingabe: Ein ungerichteter Baum $G = (V, E)$ mit Gewichten $\gamma : E \to \mathbb{N}$ und Wurzel $r \in V$.

Gesucht: Ein Matching M maximalen Gewichtes, d.h. $\sum_{e \in M} \gamma(e)$ soll maximal sein.

Hinweis: Es gibt einen Algorithmus der das Problem in $\mathcal{O}(|V|)$ löst.