Übungsblatt 2

Punkte: 50

Hertrampf, Mendel
FMI/TI, FMI/ALG
Universität Stuttgart

Aufgabe 1: Dynamisches Programmieren **[10]**

(a) [P] Gegeben sei eine Reihe von n Münzen mit Werten $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten ein Spiel mit zwei Spielern: In jedem Zug nimmt der Spieler, der an der Reihe ist, entweder die erste oder die letzte der Münzen in der Reihe. Die Münze wird aus der Reihe entfernt und der Spieler bekommt ihren Wert gutgeschrieben. Das Problem ist nun den Wert zu bestimmen, den Spieler 1 erreichen kann, wenn beide Spieler optimal spielen (d.h. insbesondere Spieler 2 versucht in jedem Zug den Wert zu minimieren, den Spieler 1 bei optimalem Spiel noch erreichen kann).

Wieso ist ein Greedy-Ansatz hier nicht optimal?

Welche Laufzeit hat ein naiver, rekursiver Ansatz?

Wie kann die Laufzeit des rekursiven Ansatzes verbessert werden?

Wie kann das Problem ohne Rekursion gelöst werden?

(b) [10] Ein *einfacher arithmetischer Ausdruck* besteht aus den Zeichen 1, +, $\times$ sowie Klammern. Wir betrachten nur syntaktisch korrekt geformte und geklammerte Ausdrücke. Jeder einfache arithmetische Ausdruck wertet sich zu einer natürlichen Zahl aus. Allerdings kann es verschiedene einfache arithmetische Ausdrücke für dieselbe Zahl geben. Zum Beispiel werten sich alle die folgenden Ausdrücke zu 6 aus:

$$1+1+1+1+1+1,$$
$$(1+1+1)\times(1+1),$$
$$(1+1)\times(1+1)+1+1,$$
$$(1+1+1+1+(1\times 1))\times 1+1\times 1.$$

Das *Gewicht* eines einfachen arithmetischen Ausdrucks ist die Anzahl der Einsen, die in ihm vorkommen (d.h. genau eins mehr als die Anzahl der Symbole + und $\times$). Wir sind hier daran interessiert, auf Eingabe einer natürlichen Zahl n das minimale Gewicht eines einfachen arithmetischen Ausdrucks für n zu berechnen. Beispielsweise sollte auf Eingabe von 6 das Gewicht 5 berechnet werden.

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der auf Eingabe einer natürlichen Zahl n das minimale Gewicht eines einfachen arithmetischen Ausdrucks für n ausgibt. Um volle Punktzahl zu erreichen, muss ihr Algorithmus eine Laufzeit polynomiell in n haben.

Aufgabe 2: Rekursionsgleichungen [20]

(a) [10] Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen exakt und beweisen Sie Ihre Antworten:

1. $t_1(0) = d, \quad t_1(n) = 2t_1(n-1) + c,$
2. $t_2(0) = 1, \quad t_2(1) = 3, \quad t_2(n) = 4 + t(n-2)$

Dabei bezeichnen c und d Konstanten.

(b) [P] Leiten Sie das Master-Theorem anhand von Rekursionsbäumen her.

(c) [10] Geben Sie das asymptotische Wachstum folgender Rekursionsgleichungen an und beweisen Sie Ihre Antworten:

1. $f_1(n) = 2f_1\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$
2. $f_2(n) = 4f_2\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
3. $f_3(n) = 9f_3\left(\frac{n}{3}\right) + n$
4. $f_4(n) = 9f_4\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 + 3n\log n$

Aufgabe 3: Randomisierung [20]

(a) [10] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass folgender Algorithmus terminiert:

```
function A: 𝔹;
begin
  x ← wähle zufällig gleichverteilt eine Zahl aus {0,1,2,3};
  if x = 0 then
    return True;
  else if x = 1 then
    return A();
  else if x = 2 then
    return A() and A();
  else
    while True do
      A();
    od;
    return False;
  fi;
end;
```

(b) [P] Sie haben einen Algorithmus mit möglichen Ausgaben „JA“ und „NEIN“. Das richtige Ergebnis wird mit Wahrscheinlichkeit 7/11 ausgegeben. Wie oft müssen Sie den Algorithmus ausführen, damit das richtige Ergebnis durch Mehrheitsentscheid mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% gefunden wird?

(c) [10] Sie müssen wieder einmal für die Übungen zu Theoretischer Informatik III eine viel zu schwierige Aufgabe bearbeiten. Es handelt sich um eine Beweisaufgabe und Sie haben auch schon einen Beweis gefunden. Allerdings sind Sie sich nicht sicher, dass Ihr Beweis auch wirklich korrekt ist! Sie beschließen daher, Ihre Kommilitonen zu fragen. Leider sind sich diese auch nicht sicher, sie antworten aber stets nach endlicher Zeit mit „Beweis ist wahrscheinlich korrekt“ oder mit „Beweis ist wahrscheinlich falsch“. Aus Erfahrung wissen Sie, dass bei Ihren Kommilitonen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt:

- Ist der Beweis tatsächlich korrekt, antworten Ihre Kommilitonen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mit „Beweis ist wahrscheinlich korrekt“.

- Ist der Beweis falsch, so antworten sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% trotzdem mit „Beweis ist wahrscheinlich korrekt“.

Sie benötigen die Punkte unbedingt und wollen vermeiden, dass Sie eine falsche Lösung abgeben. Genauer möchten Sie bei einem falschen Beweis mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9% auch herausfinden, dass der Beweis falsch ist. Wie gehen Sie vor?

Begründen Sie Ihre Antwort.