Übungsblatt 3

Punkte: 50

Hertrampf, Mendel
FMI/TI, FMI/ALG
Universität Stuttgart

Aufgabe 1: Laufzeiten **[10]**

Es seien folgende Routinen A_1 bis A_6 mit Laufzeiten $t_1(n)$ bis $t_6(n)$ gegeben. Geben Sie das asymptotische Wachstum dieser Laufzeiten in Θ-Notation an und begründen Sie Ihre Antwort. Die Laufzeit sei hierbei die Anzahl der ausgeführten arithmetischen Operationen.

```
function A_1(n):
  x := 0;
  for i = 1 to 5·n do
    for j = 7 to 42 do
      x := x + 1 od od;
  return x
```

```
function A_2(n):
  if n ≤ 17 then
    return 1 fi;
  return A_2(n − 3) + n
```

```
function A_3(n, a):
  if n = 0 then
    return a
  fi
  x := A_3(⌊n/2⌋, 2) + A_3(⌊n/4⌋, 1)
  for i = 1 to n do
    x := x + 1
  od
  return A_3(⌊n/8⌋, 2) + x
```

```
function A_4(n, a):
  if n = 0 then
    return a
  fi
  x := A_4(⌊n/2⌋, 1) + A_4(⌊n/2⌋, 2) + A_4(⌊n/2⌋, 3)
  for i = 1 to n do
    x := x + 1
  od
  return x
```

```
function A_5(n):
  if n ≤ 1 then
    return n
  fi
  i := n
  x := 0
  while i > 2 do
    i := ⌊i/2⌋
    x := x + i
  od
  return x + A_5(⌊n/2⌋)
```

```
function A_6(n):
  if n < 5 then
    return n + 1
  return 1 + A_6(⌊√n⌋)
```

Aufgabe 2: Verifizieren schneller als Berechnen **[15]**

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein zusammenhängender, gerichteter, kantengewichteter Graph ($E \subseteq V \times V$), wobei $V = \{1, \dots, n\}$ und $\gamma : E \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Mit $d(v)$ bezeichnen wir die Distanz eines kürzesten Weges von 1 nach v.

Ein Vektor $D \in \mathbb{N}^n$ heißt *Distanzvektor*, falls für alle i gilt: $D_i = d(i)$.

Zeigen Sie, dass ein Vektor $D \in \mathbb{N}^n$ genau dann ein Distanzvektor ist, wenn folgende 3 Bedingungen gelten:

1. $D_1 = 0$
2. für alle $(i, j) \in E$ gilt $D_j \leq D_i + \gamma(i, j)$,
3. für alle $j \neq 1$ existiert $(i, j) \in E$ mit $D_j = D_i + \gamma(i, j)$.

Hinweis: In der Übung wird gezeigt, dass $1. + 2. + 3. \Rightarrow D_v \geq d(v)$

Dieses Kriterium liefert einen $\mathcal{O}(|E|)$-zeitbeschränkten Algorithmus um zu testen, ob z.B. eine Implementierung des Dijkstra-Algorithmus ein korrektes Ergebnis liefert.

Aufgabe 3: Median in Linearzeit **[10]**

In der Vorlesung wurde ein Algorithmus vorgestellt um den Median einer Menge von Zahlen in Linearzeit zu bestimmen. Im Ablauf des Algorithmus wurden 5-er Gruppen gebildet. Stellen Sie die entsprechenden Rekursiongleichungen für

a) 3-er Gruppen

b) 7-er Gruppen

auf. Erklären Sie, wie Sie zu dem Ergebnis gekommen sind.

Können Sie hierfür ebenfalls eine lineare Laufzeitschranke beweisen?

Aufgabe 4: Algorithmen **[15]**

(a) [P] Geben Sie einen Algorithmus an, der folgendes Problem löst:
Eingabe ist ein Array A der Länge n. Die Einträge sind ganze Zahlen.
Finde ein Element, das mindestens $\lceil n/9 \rceil$ mal vorkommt.
Falls ein solches Element nicht exisitert gib `NULL` zurück.

Der Algorithmus darf maximal $\mathcal{O}(n)$ Zeitschritte benötigen.

Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus korrekt ist und dass die Laufzeitschranke eingehalten wird.

(b) [15] Entwerfen Sie einen Algorithmus um folgendes Problem zu lösen:

Eingabe: Ein Feld $(a_1, \ldots, a_n)$ mit paarweise verschiedenen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ sowie ein Index $k \in \{1, \ldots, n\}$ und eine weitere Zahl $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.

Ausgabe: Eine Menge $T \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit $|T| = \ell$ und $|x - m| \leq |y - m|$ für alle $x \in T$ und $y \in \{a_1, \ldots, a_n\} \setminus T$, wobei m das k-t kleinste Element aus dem Feld $(a_1, \ldots, a_n)$ sei.

Achtung: Die Ausgabe T ist nicht unbedingt eindeutig bestimmt: Für das Feld $(6, 4, 3, 1, 5)$ mit $k = 3$ und $\ell = 2$ sind beispielsweise sowohl $\{3, 4\}$ als auch $\{4, 5\}$ korrekte Ausgaben (für $\ell = 1$ ist hingegen $\{4\}$ die einzige korrekte Ausgabe).

Ihr Algorithmus muss eine Laufzeit von $\Theta(n)$ haben.