GT 4.11.2020

Graphentheorie

Gliederung

- Grundbegriffe
- bipartite Graphen
- planare Graphen
- perfekte Graphen
- weitere Graphklassen
- Extremale Graphentheorie
- [- Graphentheorie und lineare Algebra]

Beispiele

- „Die Welt ist ein Graph."
- Schauspieler / Filme
- Straßennetz
- binäre Relationen

Grundlagen

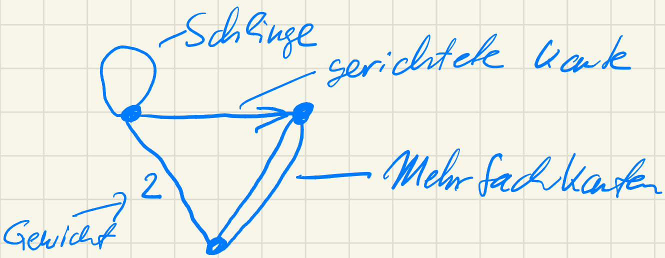
- Knoten: Objekte, Individuen, ...

V — „vertices"

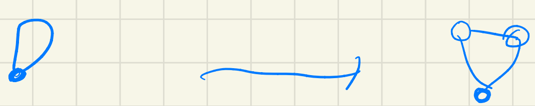
- Kanten: Relationen, Verbindungen, ...

E — „edges"

- Zeichnen: Knoten: Punkte
  Kanten: Linien



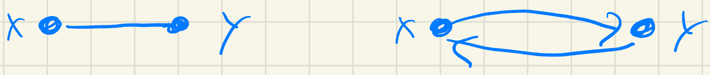
- Hier: keine Schlingen, keine Mehrfachkanten



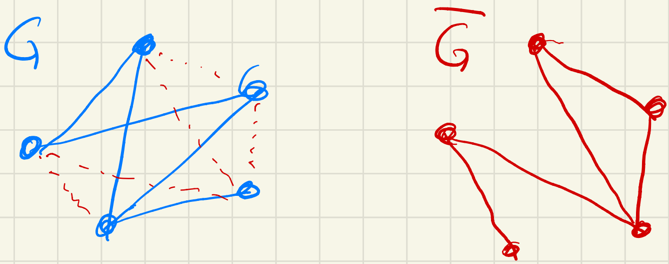
- typischerweise nur ungerichtete Kanten

- gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
- ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $E \subseteq \binom{V}{2}$

  mit $\binom{V}{2} = \{ \{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y \}$
- Wir identifizieren $\{x, y\}$ mit (x, y) und (y, x)



  Schreibweise: xy
- Komplementärgraph $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$



- Pfad / Weg / Kantenzug der Länge n (bzw. Länge $n-1$)
  (von x_1 zu x_n):

  $x_1 x_2 \cdots x_n \in V^n$ mit $x_i x_{i+1} \in E \quad \forall 1 \leq i < n$
- Kreis / Zyklus / Zykel:

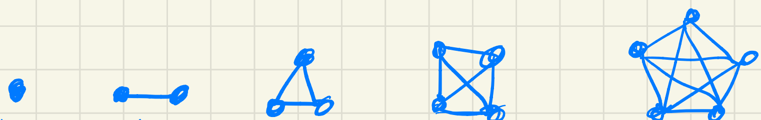
  Weg $x_1 \cdots x_n$ mit $x_1 = x_n$

- $G = (V, E)$ ist zusammenhängend, falls $\forall x, y \in V\ \exists$ Weg von x nach y
- Weg <u>einfach</u>, falls alle Knoten verschieden
- Kreis $x_1 \cdots x_n$ <u>einfach</u>, falls $x_1 \cdots x_{n-1}$ einfacher Weg.
- $G = (V, E)$ heißt <u>vollständig</u>, falls $E = \binom{V}{2}$

  <u>leer</u>, falls $E = \emptyset$

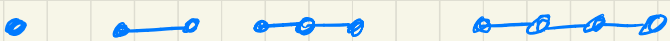
  <u>Pfad</u>, falls $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
  $E = \{x_1 x_2, x_2 x_3, \ldots, x_{n-1} x_n\}$

  <u>Kreis</u>, falls $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
  $E = \{x_1 x_2, \ldots, x_{n-1} x_n, x_n x_1\}$
- K_n: vollständiger Graph mit n Knoten



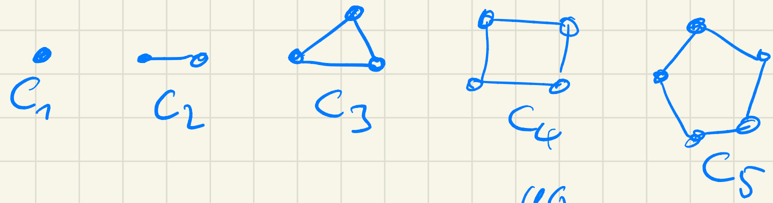
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

- P_n: Pfad mit n Knoten



P_1 P_2 P_3 P_4

- C_n: Kreis mit n Knoten



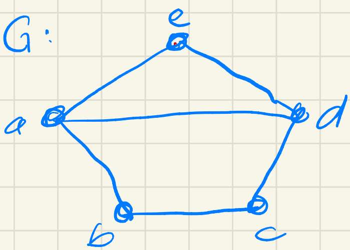
- $G'=(V',E')$ Untergraph (UG) / Teilgraph von $G=(V,E)$, falls $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

  Zeichen: $G' \subseteq G$

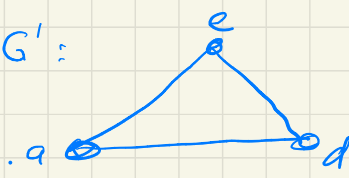
- $G'=(V',E')$ induzierter Untergraph von $G=(V,E)$, falls $V' \subseteq V$, $E' = \binom{V'}{2} \cap E$

  Zeichen: $G' \leq G$ $\quad$ $G' = G[V']$

- G:

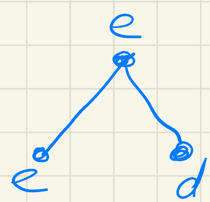


G':



$G' \leq G$

G'':



$G \subseteq G$

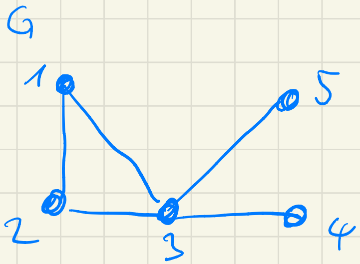
- Zusammenhangskomponente:

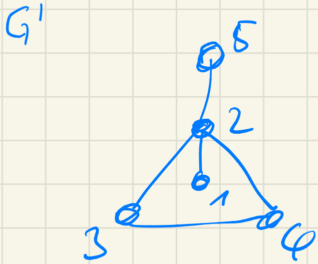
  maximaler zusammenhängender induzierter UG

- Isomorphismus von G nach G':

Bijektion: $\varphi : V \to V'$ mit

$$xy \in E \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$





$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 4 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 2 \\ 4 &\mapsto 1 \\ 5 &\mapsto 5 \end{aligned}$$

- G, G' isomorph, falls Isomorphismus ex.

[Zeichen: $G \cong G'$]

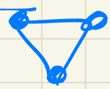
Cographen

Def.:
- K_1 ist Cograph
- $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ Cographen

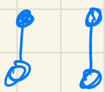
$$\Longrightarrow G_1 \cup G_2 = (V_1 \dot\cup V_2, E_1 \cup E_2) \text{ Cograph}$$

- G Cograph $\Longrightarrow$ $\overline{G}$ Cograph

Bsp.:



$\overline{K_1 \cup K_1 \cup K_1}$



$\overline{K_1 \cup K_1} \cup \overline{K_1 \cup K_1}$

Def.: G ist <u>H-frei</u>, falls H nicht isomorph zu einem induzierten UG von G ist.

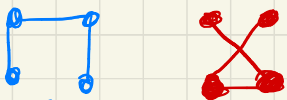
Satz: G Cograph $\Longleftrightarrow$ G ist P_4-frei

Beweis:

"$\Rightarrow$" K_1 ist P_4-frei

G_1, G_2 sind P_4-frei $\Rightarrow$ $G_1 \cup G_2$ ist P_4-frei

G ist P_4-frei $\Rightarrow$ $\overline{G}$ ist P_4-frei, da $P_4 \cong \overline{P_4}$



P_4 $\qquad$ $\overline{P_4}$

"$\Leftarrow$" Sei G P_4-frei, OE $|V| \geq 2$.

Z.z. G oder $\overline{G}$ nicht zsh.

Ang. G und $\overline{G}$ zsh.

Induktiv konstruieren wir eine Sequenz von Knoten $x_1, \dots, x_n$ mit

$$\left.\begin{array}{ll} (x_i, x_{2k}) \in E & \forall\, 1 \leq i < 2k \leq n \\ (x_i, x_{2k+1}) \notin E & \forall\, 1 \leq i < 2k+1 \leq n \end{array}\right\} (*)$$

G zsh. $\Rightarrow$ es ex. $(x_1, x_2) \in E$

Sei nun $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ eine Sequenz, welche $(*)$ erfüllt.

OE n gerade, d.h. $(x_{n-1}, x_n) \in E$

$\overline{G}$ zsh. $\Longrightarrow$ $\exists$ minimaler Weg $x_{n-1}\, y_1 \cdots y_j\, x_n$ in $\overline{G}$

$j \geq 1$ wegen $(x_{n-1}, x_n) \in E$

$j \leq 1$ wegen $\overline{G}$ P_4-frei

Wir setzen $x_{n+1} = y_1$.

$x_{n+1} \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ wegen $(x_n, x_i) \in E \;\; \forall i < n$
und $(x_n, x_{n+1}) \notin E$

Ang. $(x_i, x_{n+1}) \in E$ für $1 \leq i < n$

Dann $(x_{n-1}, x_n, x_i, x_{n+1}) \cong P_4$

$\Longrightarrow$ $x_1, \dots, x_{n+1}$ erfüllt $(*)$

↯ da Knotenzahl begrenzt.

[OE $G = G_1 \cup G_2$ ....]. #

<u>Korollar:</u> Man kann in Polynomialzeit entscheiden, ob ein Graph ein Cograph ist.