Graphentheorie 5.11.2020

Cographen

- K_1, $\cup$, $\overline{}$
- $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

$$G_1 * G_2 = (V_1 \dot\cup V_2,\ E_1 \cup E_2 \cup \underbrace{V_1 \times V_2}_{\text{als ungerichtete Kante}})$$

„$V_1 \times V_2 = \{ \{x, y\} \mid x \in V_1, y \in V_2 \}$"

- $G_1 * G_2 = \overline{\overline{G_1} \cup \overline{G_2}}$
- $\overline{K_1} = K_1$

$$\overline{\overline{G}} = G$$

$$\overline{G_1 \cup G_1} = \overline{G_1} * \overline{G_2}$$

$\Rightarrow$ Cographen lassen sich alternativ als Abschluss von K_1 unter $\cup$ und $*$ definieren.

$\cup$: Parallelschaltung

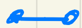
$*$: Reihenschaltung

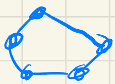
Begriffe:

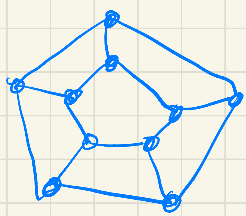
- $G = \emptyset$ falls $G = (\emptyset, \emptyset)$
- $G = (V, E)$, $n = |V|$, $e = |E|$
  manchmal auch $e \in E$
- **Grad** d_x von $x \in V$:
  $$d_x = \Big| \overbrace{\{ \underbrace{y}_{\text{Nachbarn}} \in V \mid xy \in E \}}^{= N(x)} \Big|$$
- G ist **k-regulär**, falls $d_x = k \quad \forall x \in V$

- **Bsp.:**

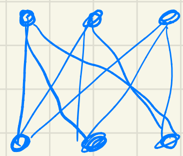

0-reg

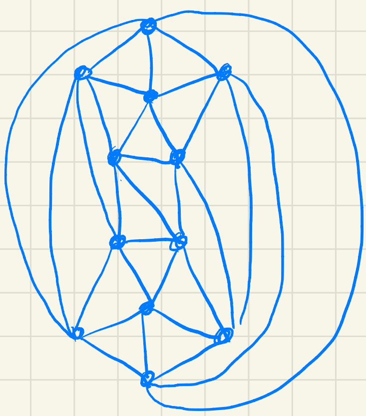

1-reg


2-reg


3-reg

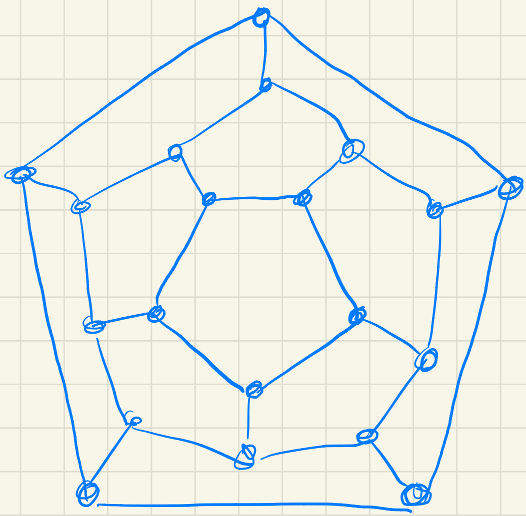
$n = 10$
$e = 15$
$f = 7$


3-reg


5-reg.

$n = 12$
$e = 30$
$f = 20$

Ikosaeder

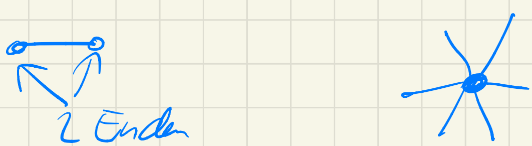


$n = 20$
$e = 30$
$f = 12$

3-reg.

Dodekaeder

- Lemma: $\sum_{v \in V} d_x = 2e$ # „Kantenenden"

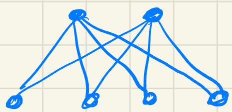


- Korollar: Die Anzahl der Knoten mit ungeraden Grad ist gerade.

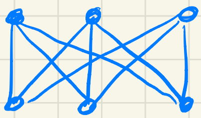
- **Def.:** G ist **bipartit**, falls $V = A \dot\cup B$ und $E \subseteq A \times B$.

- $K_{n,m}$ vollständiger bipartiter Graph:
  $V = A \dot\cup B$, $|A| = n$, $|B| = m$
  $E = A \times B$

- **Bsp.:**

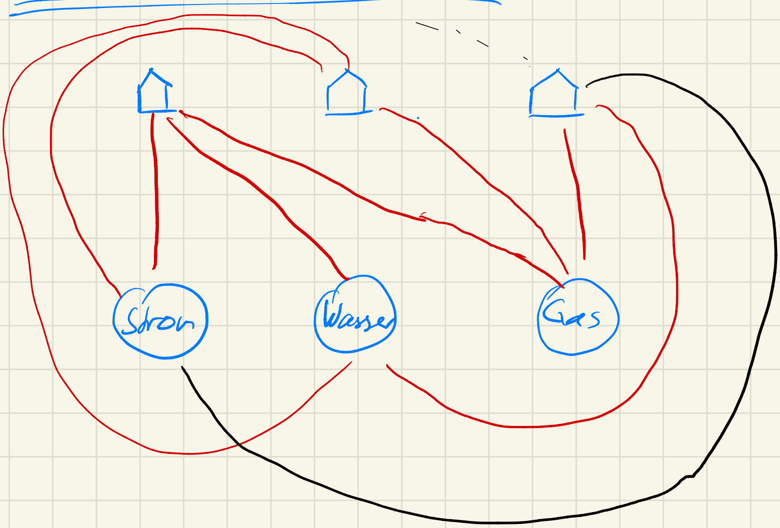


$K_{2,4}$



$K_{3,3}$

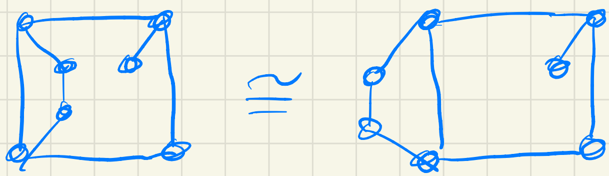
Planare Graphen



Def.: G ist planar, falls er sich in der Ebene (bzw. auf der Kugeloberfläche) ohne Überschneidung von Kanten zeichnen lässt.

Bem.: Manchmal Unterscheidung: planar / plättbar

Bsp.:



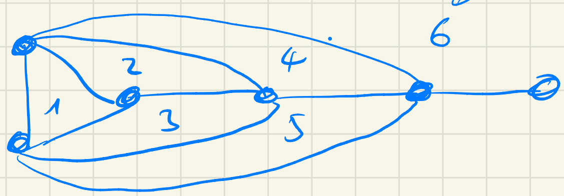
Bei obiger Unterscheidung: isomorph als plättbare (abstrakte) Graphen, aber nicht isomorph als planare Graphen.

- Def.: Eine Facette (Fläche) eines planaren Graphen ist eine zusammenhängende Fläche, welche von einem geschlossenen Kantenzug (induzierte C_n, $n \geq 3$)

umrandet wird.

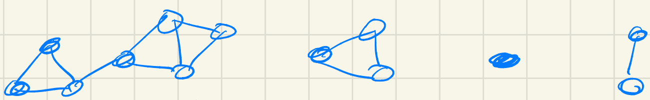
„äußere Facette"

• Bsp.:



• f = Anzahl der Facetten (inklusive der äußeren Facette)

• z = Anzahl der Zsh. Komponente



$z=4$

• <u>Satz</u> (Eulerformel)

$G \neq \emptyset$ planar, zsh. $\Rightarrow$ $n-e+f=2$

• <u>Beweis:</u> Induktion nach f

$f=1$: keine Kreise $\Rightarrow$ G Baum $\Rightarrow$ $e=n-1$

$n-(n-1)+1 = 2$ ✓

$f>1$: Sei xy Kante auf Kreis.

$G' = (V, E \setminus \{xy\})$

$n' = n$
$e' = e-1$
$f' = f-1$

xy liegt an 2 Facetten (Jordanscher Kurvensatz)

$n-e+f = n'-e'+f' \overset{IV}{=} 2$. #

- Korollar: $G \neq \emptyset$ planar $\Rightarrow n - e + f - z = 1$ #
- Korollar: G planar, $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 3n - 6$

[also $e \in O(n)$]

Beweis: Zähle „Kantenseiten"

$l \mid r$ 2 Seiten pro Kante

$n \geq 3$: Jede Facette hat mindestens 3 Kantenseiten

$$2e \geq 3f$$

[Eulerformel: $2e \geq 3(e - n + 2)$

$\Leftrightarrow 3n - 6 \geq e$] #

- Korollar: K_5 ist nicht planar.

Beweis: $n = 5$, $e = 10$, $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$. #

- Korollar: G planar, $n \geq 4$, bipartit $\Rightarrow e \leq 2n - 4$

Beweis: Jede Facette hat ≥ 4 Kantenseiten

$2e \geq 4f$. #

- Korollar: $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Beweis: $n=6$, $e=9$, $9 > 2\cdot 6 - 4 = 8$. #

$[\; 9 \leq 3\cdot 6 - 5 = 13 \;]$

- Korollar: G planar, k-regulär $\Rightarrow k \leq 5$

Beweis: $\frac{k\cdot n}{2} \leq 3n-6 \Rightarrow 12 \leq n(6-k)$. #

- Korollar: G planar $\Rightarrow$ es gibt mindestens einen Knoten vom Grad ≤ 5.

- Ziel: $K_{3,3}$ und K_5 sind „im Wesentlichen" die einzigen nicht-planaren Graphen.

Einige Graphtransformationen

- Entfernen von Knoten: Sei $U \subseteq V$

$G - U := G[V \setminus U]$

Schreibweise $U = \{x\}$: $G - x$

- G planar $\Longrightarrow$ $G-U$ planar
- <u>Kantenkontraktion</u>: Sei $e = xy \in E$

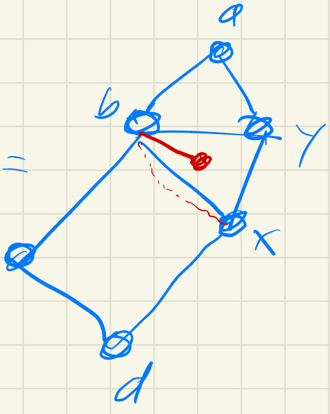
$$G/_{xy} = \left(\left(V \setminus \{x,y\}\right) \dot\cup \{z_e\},\ E' \right)$$

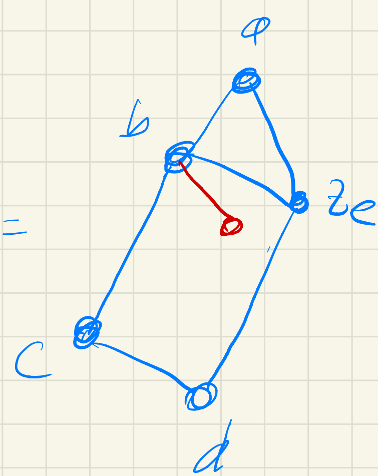
wobei z_e neu und

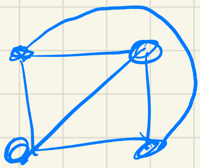
$$E' = \{ z z_e \mid z \notin \{x,y\},\ zx \in E \text{ oder } zy \in E \}$$
$$\cup \{ z z' \in E \mid \{z,z'\} \cap \{x,y\} = \emptyset \}$$

- G planar $\Longrightarrow$ $G/_{xy}$ planar

- <u>Bsp.</u>:

$G =$ 

$G/_{xy} =$ 

-  $K_4 = K_5/xy$

-