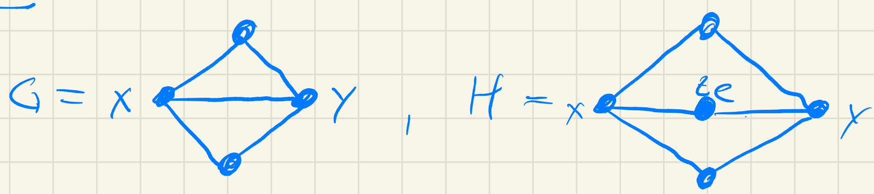
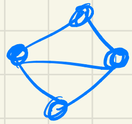
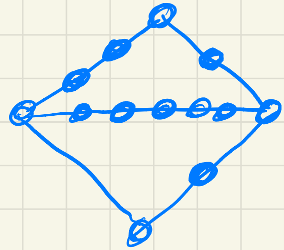
Graphentheorie 11.11.2020

Einfache Graphtransformationen

- Entfernen von Knoten
- Kanten kontrahieren
- H entsteht aus G ($= (V,E)$) durch <u>Unterteilung</u> der Kante $e = xy$, falls $H = (V \,\dot\cup\, \{z_e\}, E')$ mit z_e neu und $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{xz_e, z_ey\}$
- <u>Bsp.:</u>



- <u>Bem.:</u> G planar $\Longleftrightarrow$ H planar
- <u>Def.:</u> H ist <u>Unterteilung</u> von G, falls H durch i-fache Unterteilung von Kanten aus G entsteht, $i \geq 0$.

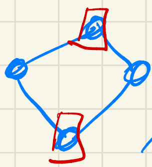
- **Bsp.:** $G =$  , $H =$ 

- **Satz** (Kuratowski, 1930):

  G planar $\iff$ G enthält keine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als (nicht notwendigerweise induzierten) UG.

- **Def.:** G ist <u>k-fach zusammenhängend</u> (k-zusammenhängend, k-zsh.), falls

  $\forall U \subseteq V: |U| < k \Rightarrow G - U$ ist zsh.

- **Bsp.:**  1-zsh., 2-zsh., nicht 3-zsh.

  K_n ist k-zsh. $\forall k \geq 0$.

- **Beweis** (Kuratowski):

  "$\Rightarrow$" klar, da K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar

  "$\Leftarrow$" Später, in mehreren Schritten (von schwierig zu leicht)

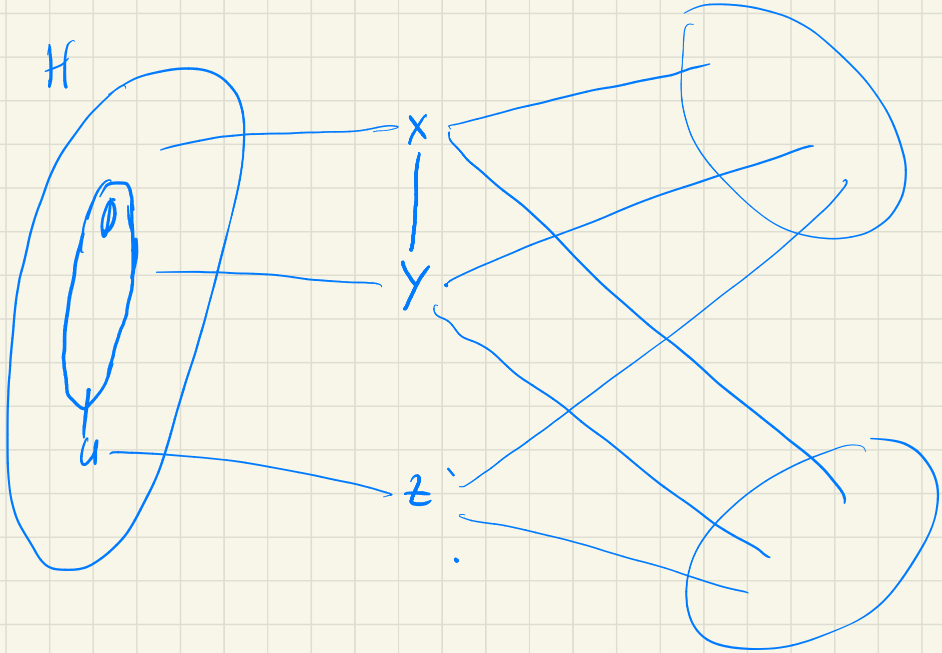
1. G 3-zsh: Satz von Thomassen
2. G 2-zsh: einfach
3. G 1-zsh: sehr einfach
4. G nicht zsh: trivial.

- <u>Satz</u> (Thomassen, 1980):

Jeder 3-zsh Graph $G=(V,E)$ mit $|V| \geq 5$ enthält eine Kante $e=xy$ so, dass G/xy 3-zsh bleibt.

- <u>Beweis:</u>

- Wähle Kante $e=xy \in E$. Falls G/xy 3-zsh, dann fertig. Andernfalls reichen in G/xy zwei Knoten, damit G/xy zerfällt. Einer dieser Knoten muss z_e sein, d.h. $\exists z \in V: G-\{x,y,z\}$ zerfällt
- x,y,z haben jeweils mindestens einen Nachbarn in jeder zsh. Komponente (sonst G nicht 3-zsh.)
- Wähle Komponente H von $G-\{x,y,z\}$



- Beh.: Es ex. Kante f in $H \cup \{z\}$ mit $G/_f$ 3-zsh.

  Beweis mit Induktion nach $|H|$.

- Wähle $u \in H$ mit $uz \in E$
- $G/_{uz}$ 3-zsh $\Longrightarrow$ fertig
- Wie oben: $\exists\, w \in V$: $G - \{u, z, w\}$ zerfällt
- OE $w \neq x$, sonst vertausche x und y
- Wähle Komponente D von $G - \{u, z, w\}$ mit $x \notin D$
- $xy \in E \Longrightarrow y \notin D$, d.h. $D \cap \{x, y, z, u, w\} = \emptyset$

  $D \neq \emptyset$ [$y = w$ ist möglich].

- u hat Nachbarn in D

$\Longrightarrow D \subseteq H \setminus \{u\}$, $|D| < |H|$

- Wir können also Induktion auf D mit den Kanten $\{u, z, w\}$ anwenden. $\#$

__Korollar:__ Kante xy aus vorigem Satz lässt sich in Polynomialzeit bestimmen.

__Zurück zu Kuratowski:__

G enthält keine Unterteilung des $K_{3,3}$ und des K_5.

Z: G planar

OE $|V| \geq 5$

__1. Fall__ G 3-zsh. Wähle $xy \in E$ mit G/xy 3-zsh.

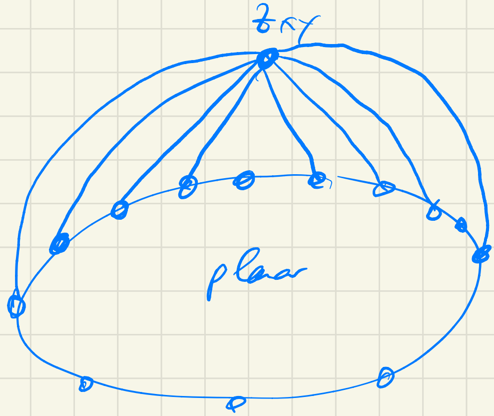
__Beh.:__ G/xy enthält Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$

$\rightarrow$ G auch.

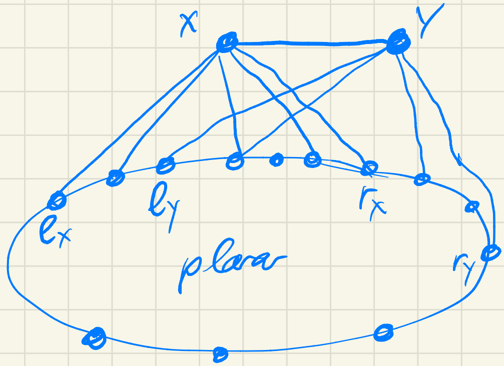
__Beweis:__ später!

- $G/_{xy}$ enthält keine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ (nach obiger Beh.)
- Induktion: $G/_{xy}$ planar
- z_{xy} := Knoten von $G/_{xy}$, der $xy \in E$ entspricht
- z_{xy} liegt im inneren einer Facette des 2-zsh. Graphen $G/_{xy} - z_{xy}$
- „Kugeloberfläche": Wir machen diese Facette zur äußeren Facette:

$G/_{xy}$



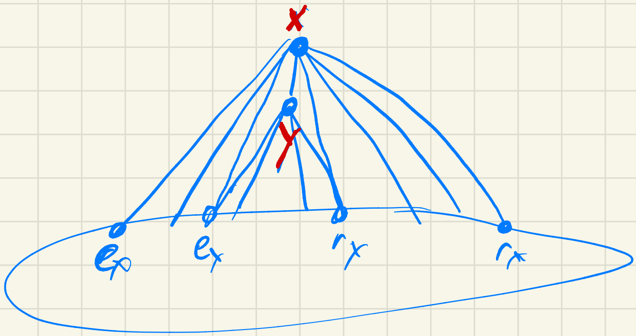
G



Fallunterscheidung nach Anordnung von

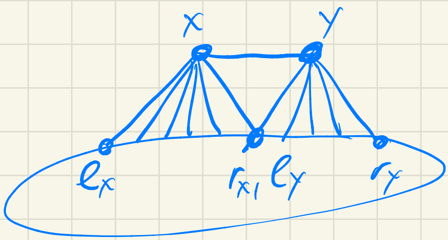
$l_x, l_y, r_x, r_y \in V$

(A)



planar

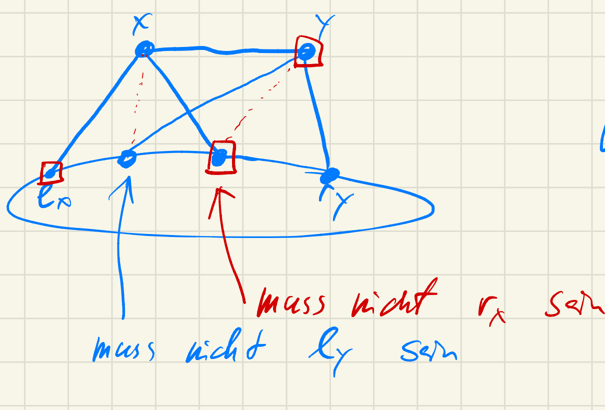
(B)



planar

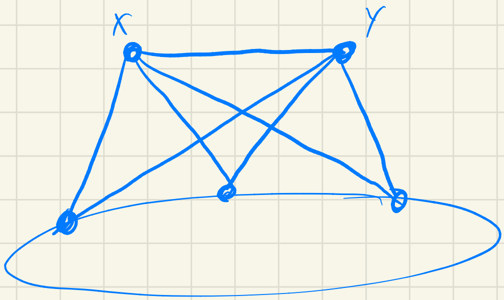
OE $l_x \le l_y$ und $l_y < r_x$

(C)



$K_{3,3}$ ↯

(D)



K_5 y

Fall 3-zsh. abgeschlossen.

2. Fall: G 2-zsh., nicht 3-zsh

Wähle $x, y \in V$ so, dass $G - \{x, y\}$ zerfällt

Setze $e = xy$ (unabh., ob $e \in E$ oder nicht)

Sei U Komponente von $G - \{x, y\}$

$G_1 = G[(V \setminus U) \cup \{x, y\}]$

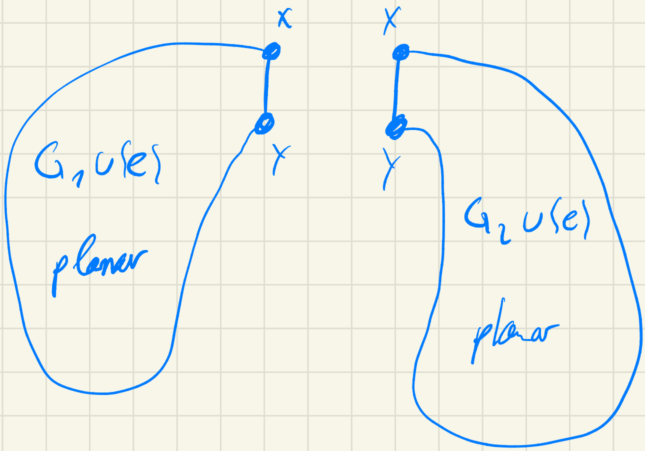
$G_2 = G[U \cup \{x, y\}]$

G 2-zsh. $\Rightarrow$ Weg von x zu y in G_1 und G_2

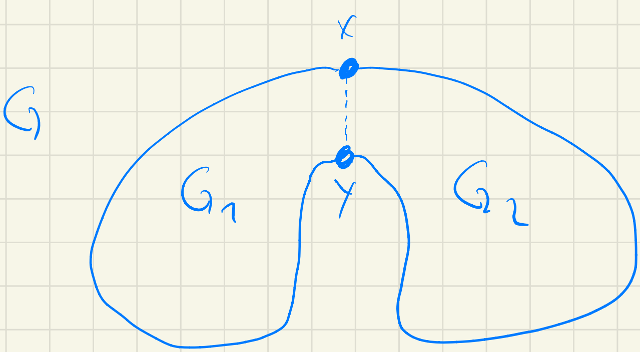
$\Rightarrow$ Weder $G_1 \cup \{e\}$ noch $G_2 \cup \{e\}$ enthalten Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$

Induktiv: $G_1 \cup \{e\}$ planar
$G_2 \cup \{e\}$ planar

OE e liegt jeweils außen

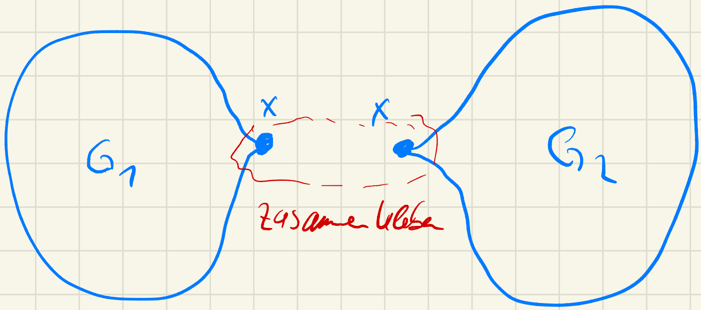


Zusammenkleben



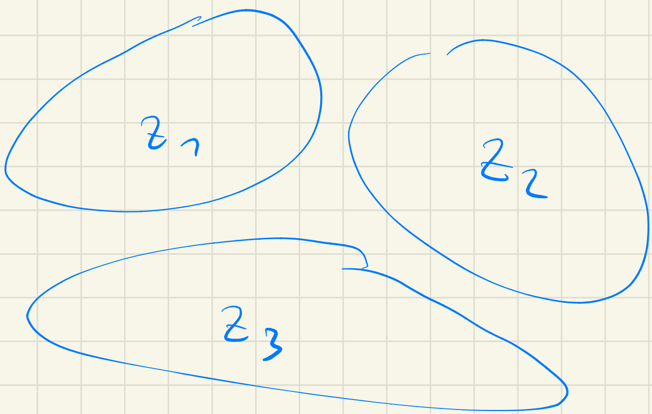
3. Fall. G 1-zsh, aber nicht 2-zsh

Wähle $x \in V$ so, dass $G - x$ zerfällt



4. Fall: G nicht zsh.

Betrachte zsh. - Komp. einzeln



#