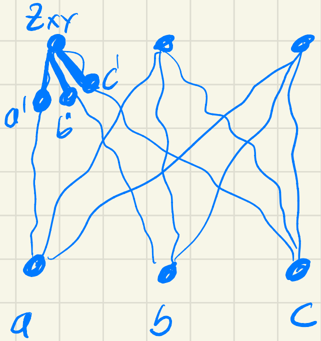
Graphentheorie 18.11.2020

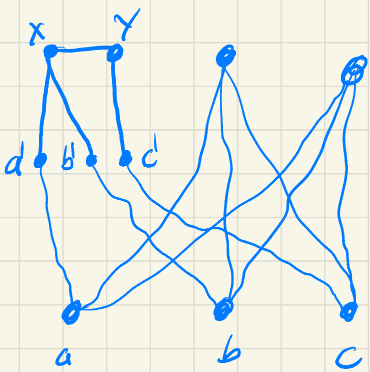
Lemma: $G/_{xy}$ enthält K_5 oder $K_{3,3}$
$\Longrightarrow$ G auch.

Beweis: "$K_{3,3} \Rightarrow K_{3,3}$":



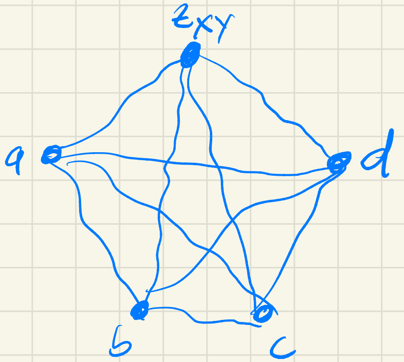
in $G/_{xy}$

- $\nexists$ xa', $xb' \in E$ in G
- $xc' \in E$: Fertig
- $yc' \in E$:

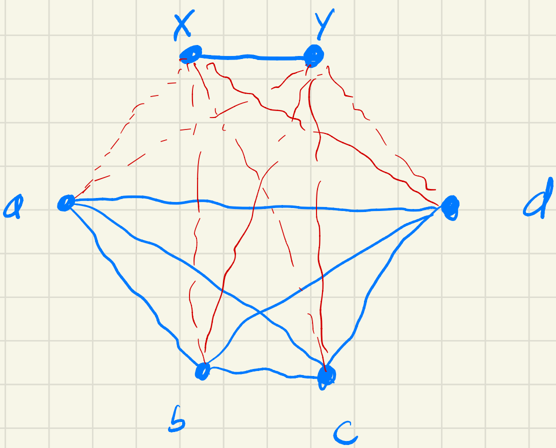


enthält $K_{3,3}$

"$K_5 \Longrightarrow K_5 \vee K_{3,3}$":

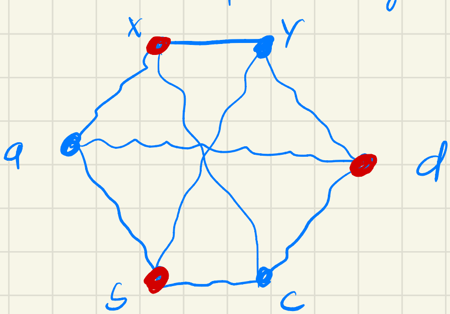


in G/xy



Falls x (oder y) mit ≥ 3 der Knoten a, b, c, d verbunden ist in $G \Longrightarrow K_5$.

Sei also x, y mit jeweils 2 Knoten verbunden



$K_{3,3}$

#

Korollar: Man kann in Polynomialzeit entscheiden, ob ein Graph planar ist.

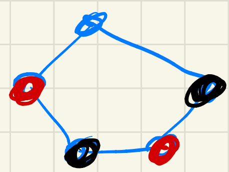
Def.: $c: V \to C$ **Färbung**, falls $c(x) \neq c(y)$ für alle $xy \in E$. C = Menge der Farben.

Graph ist **k-färbbar**, falls eine Färbung mit k Farben existiert.

$\chi(G)$ = minimale Anzahl von Farben, die ausreicht, um G zu färben (**Färbungszahl**).

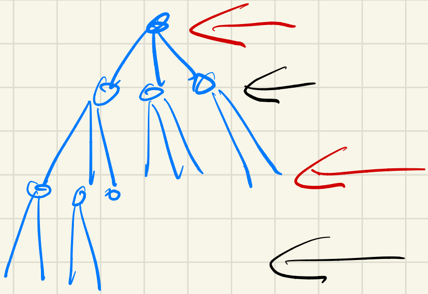
Bsp.: $\chi(K_n) = n$ $\qquad \chi(C_5) = 3$

$\chi(C_6) = 2$



$\chi(K_{m,n}) \leq 2$

$\chi(B) \leq 2$ für Baum B



Def.: Sei $L : V \to 2^C \setminus \{\emptyset\}$ eine Liste von möglichen Farben für jeden Knoten.
Eine **L-Listenfärbung** $c : V \to C$ ist eine Färbung mit $c(x) \in L(x)$ $\forall x \in V$.
G ist **k-listenfärbbar**, falls für alle Listen $L : V \to \binom{C}{k}$ eine L-Listenfärbung ex.
$\chi_\ell(G)$ = minimales k, sodass G k-listenfärbbar ist.

Bem.: $\chi(G) \leq \chi_\ell(G)$

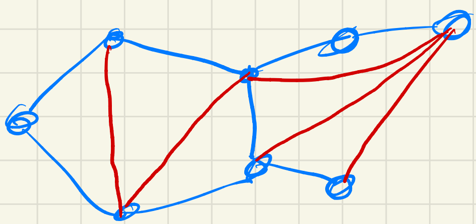
Satz (4-Farbensatz): G planar $\Longrightarrow$ $\chi(G) \leq 4$
[ohne Beweis]

Satz: G planar $\Rightarrow$ $\chi_\ell(G) \leq 5$.

Korollar: G planar $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq 5$.
(mit Beweis)

Beweis des Satzes:

OE seien alle (bis auf die äußere) Facette triangeliert und alle Knoten haben mindestens Grad 2 (fast-triangeliert)



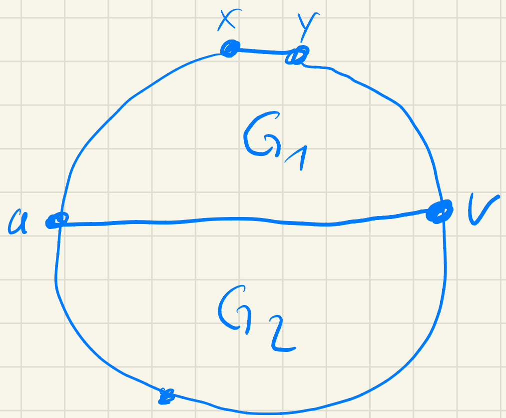
Behauptung: Unter folgender Invariante für L kann G L-listengefärbt werden:

1. Max. zwei Knoten x, y mit $xy \in E$ auf der äußeren Facette B sind schon mit zwei Farben α bzw. β gefärbt.
2. Für alle v auf B gilt $|L(v)| \geq 3$.

(3) Für alle inneren Knoten v gilt $|L(v)| \geq 5$.

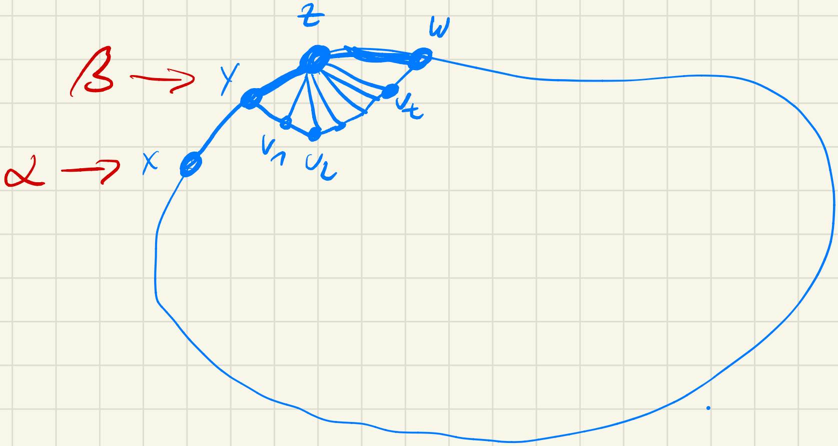
$|V| = 3$: ✓ Sei nun $|V| > 3$.

1. Fall: B besitzt Sehne uv



Färbe G_1 induktiv; danach färbe G_2 induktiv (wobei u, v schon gefärbt sind via G_1).

2. Fall: Keine Sehne. Sei $z \neq x$ mit $z \in B$ und $yz \in E$



G fast-trianguliert $\Rightarrow$ Nachbarn von z

bilden Weg $x v_1 v_2 \cdots v_t\, w$, $w \in B$

$G' = G - z$. Sei $\{\gamma, \delta\} \subseteq L(z) \setminus \{\beta\}$

Setze $L'(v_i) := L(v_i) \setminus \{\gamma, \delta\}$.

sonst $L' = L$

L' erfüllt Invariante für G'

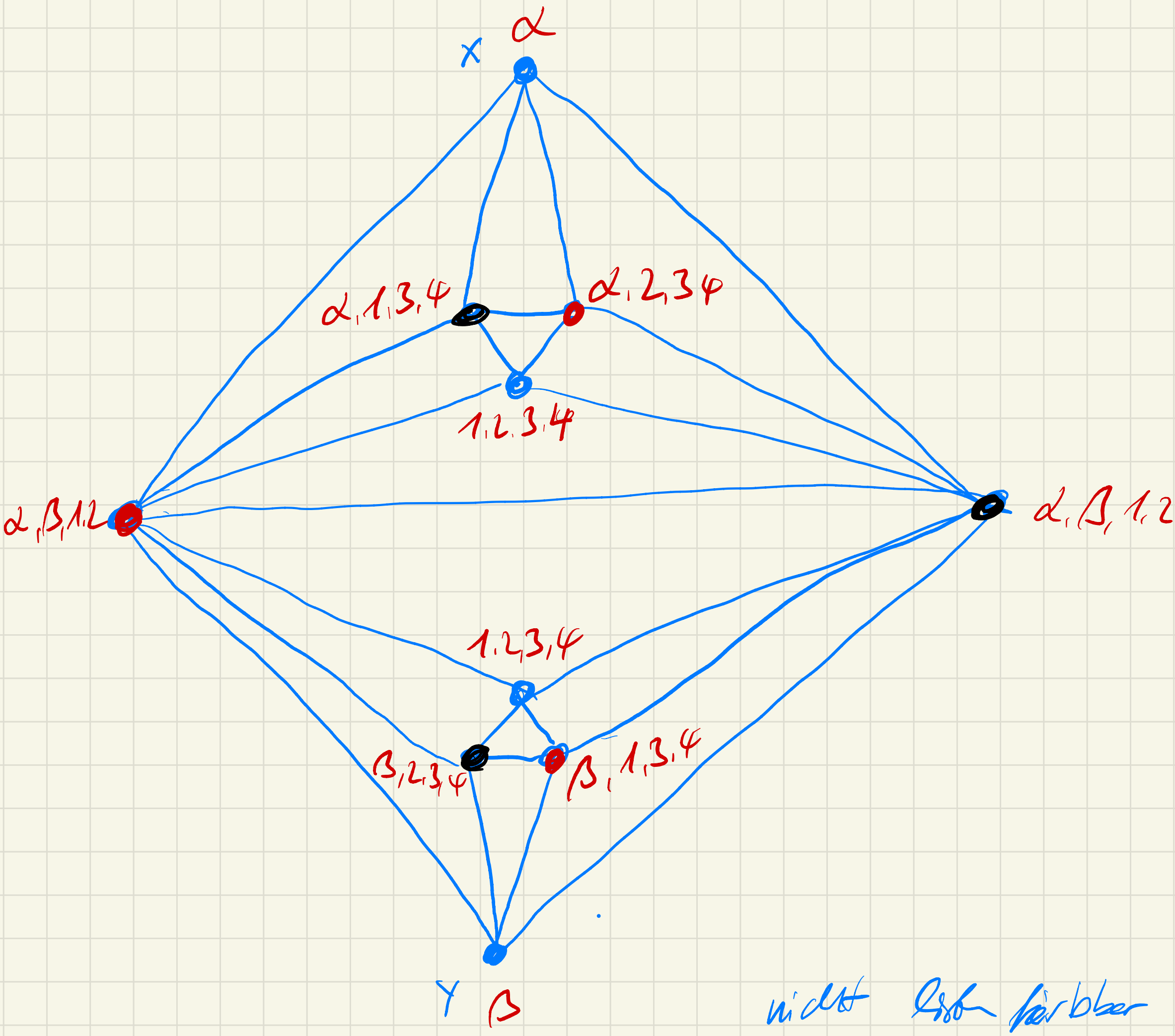
$\xrightarrow{IV}$ G' besitzt L'-Listenfärbung

$\Rightarrow$ Eine Farbe (γ oder δ) bleibt für

z übrig ($c(w) \in \{\gamma, \delta\}$ ist möglich).

#

Bemerkung: Es ex. planarer, 3-färbbarer Graph, der nicht 4-liste färbbar ist:

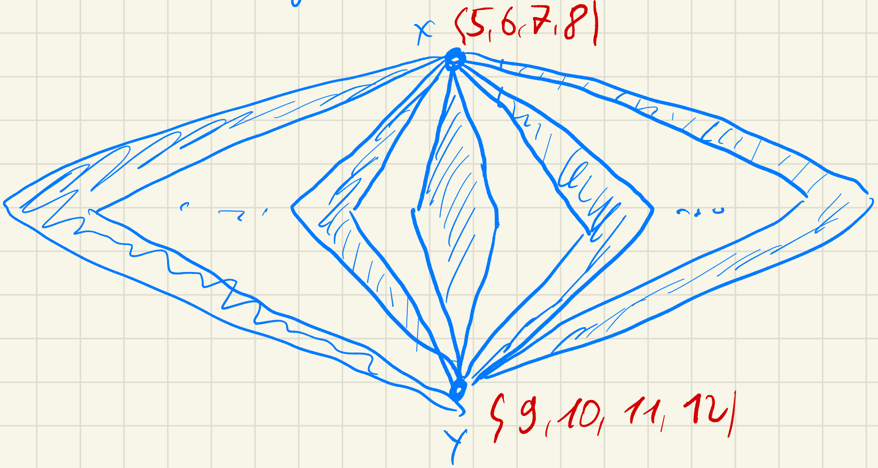


nicht listen färbbar

$4 \cdot 4 = 16$ Kopien des obigen Graphen

für $\alpha \in \{5, 6, 7, 8\}$, $\beta \in \{9, 10, 11, 12\}$.

Verkleben aller x-Knoten und aller y-Knoten liefert gewünschten Graph.



$2 + 16 \cdot 8 = 130$ Knoten