# Graphentheorie 19.11.2020

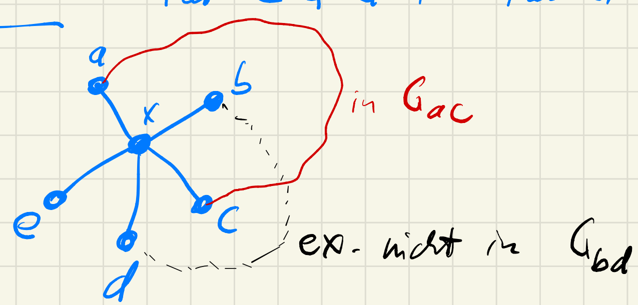
- Wdh.

  - Färbung
  - Färbungszahl $\chi$
  - Bsp. $K_n$, $C_n$, Bäume, $K_{m,n}$
  - Motivation: Landkarten
  - 4-Farbensatz [ohne Beweis]
  - G planar $\Longrightarrow$ $\chi(G) \leq 6$ [einfacher Linearzeitalg.]
  - G planar $\Longrightarrow$ $\chi(G) \leq 5$
    [Linearzeitalg. mit Satz v. Wernicke]

Satz: G planar $\Longrightarrow$ $\chi(G) \leq 5$.

Standardbeweis:

- Sei $x \in V$ mit $d_x$ minimal:
- $d_x \leq 4$: Färbe $G-x$ induktiv, färbe $x$ mit einer der verbleibenden Farben
- $d_x = 5$: Färbe $G' = G-x$ induktiv.



OE Farben von $a, \dots, e$ in $G'$ alle verschieden.

Sei $G_{a,c}$ der induzierte UG von $G'$, der nur aus den Knoten besteht mit den Farben von $a$ und $c$.

<u>1. Fall:</u> $a, c$ in versch. Zsh.komp. von $G_{ac}$

$\Rightarrow$ Vertausche die Farbe in Zsh. Komp. von $a$

$\Rightarrow$ $a$ und $c$ gleich gefärbt. Fertig.

<u>2. Fall:</u> $a, c$ in der gleichen Zsh. Komp. von $G_{ac}$

$\Rightarrow$ Weg von $a$ zu $c$, der nur die Farben von $a$ und $c$ verwendet.

$\Rightarrow$ betrachte $b, d$ in $G_{bd}$. #

<u>Satz (Wernicke, 1904):</u>

$G$ planar, Minimalgrad $5 \Longrightarrow \exists xy \in E: d_x = 5, d_x \leq 6.$

<u>Beweis:</u> (durch „Discharging")

OE $G$ trianguliert

(d.h. $3f = 2e$)

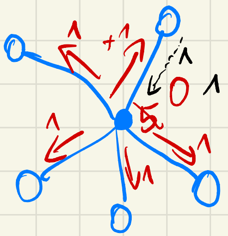
1. Phase: „Charging" jeder Knoten $x$ erhält das Startgewicht $30-5d_x$.

Gesamtgewicht: $\sum_{x\in V}(30-5d_x) = 30n-10e = 60$

$[30n-10e = 30n-10e-20e+30f = 30(n-e+f) = 60]$

2. Phase: „Discharging"

Jeder Knoten mit Grad 5 — Startgewicht 5 — gibt jedem seiner Nachbarn 1 von seinem Gewicht ab.




Sei $x$ ein Knoten mit positivem Gewicht nach Phase 2:

$0 < \text{Gewicht} \leq 30-5d_x+d_x = 30-4d_x$

$\Rightarrow d_x \leq 7$

$d_x \leq 6$: Nachbar mit Grad 5: Fertig

$d_x = 7$: $x$ hat mindestens 6 Nachbarn mit Grad 5

G trianguliert $\Rightarrow$ mindestens 2 Nachbarn sind durch Kante verbunden

[diese Kante wg. Min.grad 5 nicht durch die Triangulation hinzugekommen sein.] #

---

<u>Bem.:</u> Beweis zu $\chi_e(G) \leq 5$ für $G$ planar lässt sich auch zu Linearzeit alg. für 5-Färbbarkeit.