Graphentheorie 25.11.2020

Def.: Polygon = planare Einbettung eines C_n, $n \geq 3$, in die Ebene mit geraden Kanten.

n = Länge

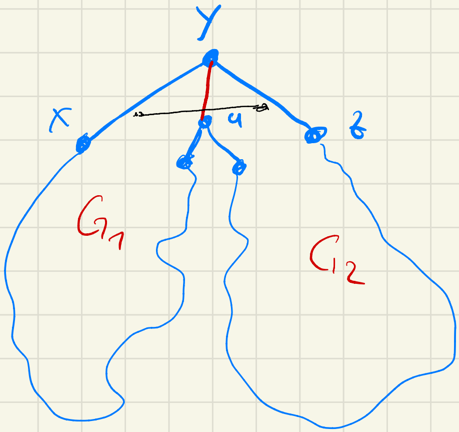
Def.: Polygontriangulierung = Triangulierung eines Polygons mit geraden Kanten ohne die planare Einbettung zu ändern (d.h. alle Facetten außer der äußeren sind Dreiecke).

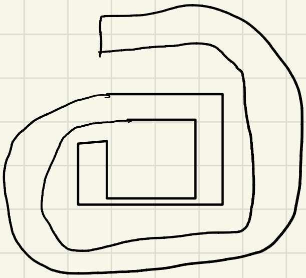
Satz: Jedes Polygon besitzt eine Polygontriangulierung.

Beweis: Seien x, y, z Punkte mit $xy, yz \in E$ und spitzem Winkel (nach innen) bei y. Falls xz ohne Schnitt gezeichnet werden kann, so tun wir dies (und entfernen y). Andernfalls liegt ein Punkt im Inneren des Dreiecks xyz.

OE sei $\min(d(u, xy), d(u, yz))$ minimal

Zeichne xu (und spalte Polygon an dieser Stelle in zwei Teile). Bel ~~folgt~~ mit Induktion.

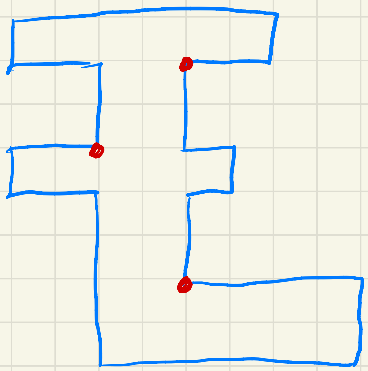




#

Def.: Eine Teilmenge $W \subseteq V$ bildet eine <u>Wächtermenge</u> eines Polygons $G = (V, \Theta)$, falls jeder Punkt im Inneren des Polygons durch eine gerade Strecke ohne Schnitt mit einer Kante mit einem Knoten aus W verbunden werden kann. Elemente aus W heißen <u>Wächter</u>.

Bsp.: Nachts im Museum, Videokameras



3 Wächter

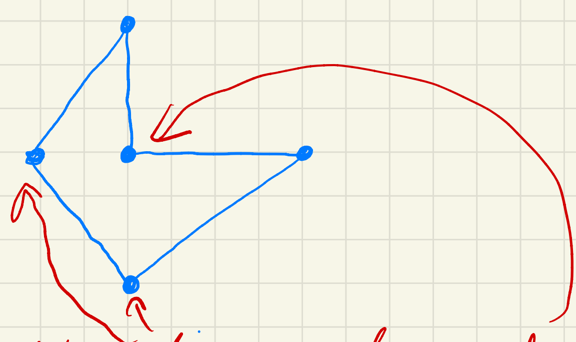
Satz (Chvatal, 1975) Jedes Polygon der Länge n besitzt eine Wächtermenge der Größe $\leq \frac{n}{3}$.

Bem.:

Beweis: Wir betrachten eine Polygontriangulierung des Polygons. Wir färben diese mit 3 Farben. (Wieso?)
Jedes Dreieck ist mit 3 Farben gefärbt.
Für jede Farbe gilt: die Knoten einer Farbe bilden eine Wächtermenge. #

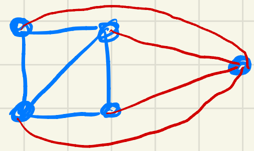
<u>Korollar:</u> Jedes Polygon mit ≤ 5 Knoten besitzt eine Wächtermenge bestehend aus nur einem Wächter w, derart dass w nur auf den beiden Geraden liegt, welche durch seine beiden Kanten definiert werden (und auf keiner der Geraden, welche durch andere Kanten definiert werden).

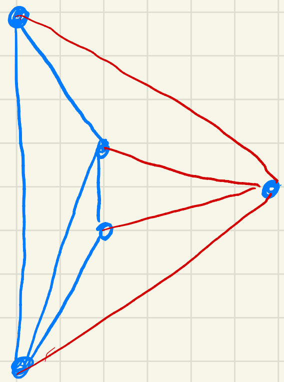
<u>Beweis:</u> $1 = \lfloor \frac{5}{3} \rfloor$; Geradeneigenschaft folgt aus der Polygontriangulierung. #



Wir wollen nicht diese sondern diese Wächter.

Bsp.:





Satz (Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951):
Jeder planare Graph besitzt eine planare Einbettung mit graden Kanten (ohne die Facetten zu verändern).

Beweis: Sei $G=(V,E)$ ein planarer Graph mit n Knoten.

OE G trianguliert (auch äußere Facette).

$n \leq 3$: ✓

$n > 3$: Dann $d_x \geq 3$ $\forall x \in V$. Es existieren mindestens 4 Knoten mit Grad ≤ 5

[Gewicht $6-d_x$ für Knoten x,

Gesamtgewicht $= \sum_{x \in V} (6-d_x) = 6n - 2e \overset{2e=3f}{=} 12$,

Gewicht ≤ 3].

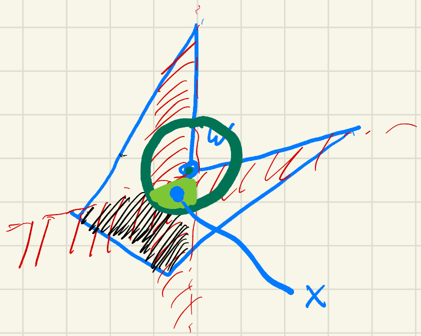
Seien a,b,c die Knoten der äußeren Facette. Sei $x \notin \{a,b,c\}$ mit $d_x \leq 5$.

Sei G' der Graph, der aus $G-x$ durch Triangulieren entsteht. Induktiv besitzt G' eine planare Einbettung mit geraden Kanten.

$\Rightarrow$ $G-x$ besitzt planare Einbettung mit geraden Kanten. Betrachte Facette in $G-x$ um x. Voriges Korollar liefert Wächter w.

Wir können x innerhalb der Facette in der Nähe von w platzieren, sodass x mit seinen Nachbarn durch eine gerade Kante verbunden werden kann.

#


w
x