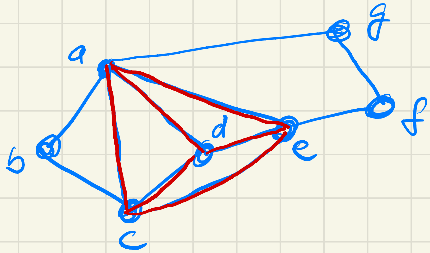
Graphenparameter

- Def.: Eine Clique eines Graphen $G=(V,E)$ ist eine Menge von Knoten $C \subseteq V$ mit $G[C] = K_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
- Def.: Eine unabh. Menge ... $U \subseteq V$ mit $G[U] = \overline{K_n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.



Cliquen: $\{a,b,c\}$, $\{a\}$, $\{a,c,d,e\}$, $\{g,f\}$, ...

unabh. Mengen: $\{g,e,b\}$, $\{a\}$, $\{g,d,b\}$, ...

- Parameter von $G = (V, E)$:

+ – $\omega(G)$ = Cliquenzahl = Größe einer größten Clique von G

$\updownarrow$ α und ω

+ – $\alpha(G)$ = Unabhängigkeitszahl = Größe einer größten unabh. Menge von G

"Klique"

– – $\kappa(G)$ = Cliquenüberdeckungszahl = minimale Anzahl von Cliquen $C_1, \dots, C_e$ mit $V = C_1 \cup \dots \cup C_e$ [OE $C_1, \dots, C_e$ disjunkt]

"chromatisch"

– – $\chi(G)$ = Färbungszahl = minimale Anzahl von unabh. Mengen $U_1, \dots, U_e$ mit $V = U_1 \cup \dots \cup U_e$ [OE $U_1, \dots, U_e$ disjunkt]

E

– – $\rho(G)$ = Kantenüberdeckungszahl = minimale Größe einer Kantenüberdeckung [Kantenüberdeckung $D \subseteq E$ mit $\forall x \in V \; \exists d \in D: x \in d$]

"Träger"

– – $\tau(G)$ = Knotenüberdeckungszahl = minimale Größe einer Knotenüberdeckung / eines Trägers [Träger $T \subseteq V$ mit $\forall e \in E \; \exists t \in T: t \in e$]

"Matching"

+ – $\mu(G)$ = Matchingzahl = maximale Größe eines Matchings [Matching $M \subseteq E$ mit $\forall n, m \in M: n \cap m = \emptyset$]

d_x

(+) – $\Delta(G) = \max \{ d_x \mid x \in V \}$

d_x

(–) – $\delta(G) = \min \{ d_x \mid x \in V \}$

"girth"

– – $g(G)$ = Taillenweite ("girth") = min. Länge eines Kreises, der UG von G ist.

+ $\hat{=}$ max , – $\hat{=}$ min

Satz:

(a) $\overset{+}{\omega}(G) \le \overset{-}{\chi}(G)$

(b) $\overset{+}{\alpha}(G) \le \overset{-}{\kappa}(G)$

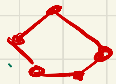
(c) $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$

(d) $\chi(G) = \kappa(\overline{G})$

(e) $\overset{+}{\alpha}(G) + \overset{-}{\tau}(G) = n$

(f) G besitzt keine isolierten Knoten, dann

$$\overset{+}{\mu}(G) + \overset{-}{\rho}(G) = n$$



Beweis:

(a) Um eine Clique der Größe ℓ zu färben, benötigt man ℓ Farben

(b) Alle Knoten einer unabh. Menge liegen in unterschiedl. Cliquen einer Cliquenüberdeckung

(c)/(d) Klar: eine Clique von G ist eine unabh. Menge von $\overline{G}$ und umgekehrt

(e) $\alpha(G) + \tau(G) \le n$

Sei $U \subseteq V$ eine größte unabh. Menge $\Rightarrow V \setminus U$ Träger

$\Rightarrow \tau(G) \le |V \setminus U| \Rightarrow$
$\alpha(G) + \tau(G) \le |U| + |V \setminus U| = n$

$\underline{\alpha(G) + \tau(G) \geq n}$

Sei $T \subseteq V$ ein min. Träger $\Rightarrow$ $V \setminus T$ unabh.

$\Rightarrow \alpha(G) \geq |V \setminus T| \Rightarrow$

$\alpha(G) + \tau(G) = \alpha(G) + |T| \geq |V \setminus T| + |T| = n$

(f) $\underline{\mu(G) + \eta(G) \geq n:}$

Sei $D \subseteq E$ eine kleinste Kantenüberdeckung,

d.h. $|D| = \eta(G)$

$G' = (V, D)$ hat keine isolierten Knoten

Jede zsh. Komp. von G' ist ein Baum

$\Rightarrow$ $\underline{|D| = |V| - z}$ wobei

$z = \#$ zsh. Komp. von G'

Wir wählen aus jeder zsh. Komp. eine Kante.

Dies liefert ein Matching $\Rightarrow \mu(G) \geq z$

$\Rightarrow \mu(G) + \eta(G) = \mu(G) + |D| \geq z + |D| = n$

$\underline{\mu(G) + \eta(G) \leq n:}$

Sei $M \subseteq E$ ein max. Matching.

Sei $U \subseteq V$ die Knotenmenge, die zu keiner Kante aus M gehören.

U unabh., $2 \cdot |M| + |U| = n$

Zu jedem Knoten aus U wählen wir eine Kante. Zusammen mit den Kanten aus M bildet dies eine Kantenüberdeckung.

d. h. $\eta(G) \leq |M| + |U|$

$\Rightarrow \mu(G) + \eta(G) = |M| + \eta(G) \leq |M| + |M| + |U| = n.$

#