Graphentheorie 2.12.2020

$\alpha(G)$ = Unabh. zahl

$\chi(G)$ = Färbungszahl

$\omega(G)$ = Cliquenzahl

$\kappa(G)$ = Cliquenüberdeckungszahl

$g(G)$ = Taillenweite

- Es gilt $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$. Analog: $\kappa(G) \geq \frac{n}{\omega(G)}$

# Die Probabilistische Methode

- Grundidee: um zu zeigen, dass ein Objekt mit Eigenschaft X ex., wird ein geeigneter W'keits-Raum eingeführt und gezeigt, dass die W'keit für X in diesem Raum $> 0$ ist.
- $\mathcal{G}(n,p)$ = alle Graphen mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$, wobei jede Kante $xy \in \binom{V}{2}$ mit W'keit $p$ eingezeichnet und mit W'keit $1-p$ nicht

eingezeichnet. Jede Kante ist unabh. von den anderen Kanten.

- Graphenparameter können nun als Zufallsvariable auf $\mathcal{G}(n,p)$ reinterpretiert werden.
- Sei $H$ ein fester Graph mit Knoten aus $\{1, \dots, n\}$, $e_H$ = Kantenzahl von $H$, $n_H$ = Knotenzahl von $H$

$$\mathbb{P}(H \subseteq G) = p^{e_H}$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{H \subseteq G \text{ induziert}}_{H \subseteq G,\ \overline{H} \subseteq \overline{G}}) = p^{e_H} (1-p)^{\binom{|H|}{2} - e_H}$$

- Wenn wir die Knotenmenge nicht fest lassen, ist eine Abschätzung schwieriger.

Lemma:
- $\mathbb{P}(\alpha(G) \geq k) \leq \binom{n}{k} (1-p)^{\binom{k}{2}}$
- Beweis: $\mathbb{P}(\alpha(G) \geq k) \leq \sum\limits_{\substack{U \subseteq V \\ |U| = k \\ U \text{ unabh.}}} \mathbb{P}(U \subseteq G)$

$$= \binom{n}{k} (1-p)^{\binom{k}{2}}$$

#

**Lemma** (Markov-Ungleichung): Sei $X \geq 0$ eine Zufallsvariable auf $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n,p)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Dann: $$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

**Beweis:** $$\mathbb{E}X = \sum_{G \in \mathcal{G}} \mathbb{P}(G) \cdot X(G) \geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ X(G) \geq a}} \mathbb{P}(G) \cdot X(G)$$

$$\geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ X(G) \geq a}} \mathbb{P}(G) \cdot a = \mathbb{P}(X \geq a) \cdot a \qquad \#$$

**Lemma:** Sei $X(G)$ die Anzahl der Kreise der Länge $k$ in $G \in \mathcal{G}(n,p)$.
(nicht notwendigerweise induziert)

Dann $$\mathbb{E}X = \frac{n^{\underline{k}}}{2k} \cdot p^k$$

wobei $$n^{\underline{k}} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}}$$

**Beweis:** Für jeden Kreis $C$ der Länge $k$ mit Knoten aus $\{1, \ldots, n\}$ def. wir die charakteristische Zufallsvariable

$$X_C(G) = \begin{cases} 1 & \text{falls } C \subseteq G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit $\mathbb{E} X_C = \mathbb{P}(C \subseteq G) = p^k$.

Es gibt $\frac{n^k}{2k}$ viele Kreise der Länge $k$.

Damit $\mathbb{E} X = \mathbb{E}\left(\sum_C X_C\right) = \sum_C \mathbb{E} X_C = \frac{n^k}{2k} p^k$. #

<u>Lemma:</u> Sei $k>0$, $p=p(n)$ gegeben mit W'keit in $\mathcal{G}(n,p)$

$p \geq \frac{6k \ln n}{n}$ für genügend großes $n$. Dann

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\alpha(G) \geq \frac{n}{2k}\right) = 0$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\alpha \geq r) &\overset{\text{voriges Lemma}}{\leq} \binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}} \\
&\leq n^r (1-p)^{\binom{r}{2}} \\
&= \left(n \cdot (1-p)^{(r-1)/2}\right)^r \\
&\underset{1+x \leq e^x}{\leq} \left(n\, e^{-p \cdot (r-1)/2}\right)^r
\end{aligned}$$

Für $p \geq \frac{6k \ln n}{n}$ und $r \geq \frac{n}{2k}$ gilt nun

$$n\, e^{-p(r-1)/2} = n\, e^{-pr/2 + p/2}$$

$$\le n\, e^{-3/2 \ln n + p/2}$$

$$\underset{p\le 1}{\le} n\, n^{-3/2} \cdot e^{1/2} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Mit $r = \frac{n}{2k}$ folgt die Beh. #

**Satz (Erdős 1959):**

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Graphen $G$ mit $g(G) > k$ und $\chi(G) > k$.

Beweis: Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$ fest und $p = n^{\varepsilon - 1}$

$X(G)$ = Anzahl der Kreise der Länge $\le k$.

Nach vorigem Lemma gilt in $\mathcal{G}(n,k)$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=3}^{k} \frac{n^{\underline{i}}}{2i} p^i \le \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \overset{np \ge 1}{\le} \frac{1}{2}(k-2)\, n^k p^k$$

Mit der Markov-Ungleichung:

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2\,\mathbb{E}X}{n}$$

$$\leq (k-2)\, n^{k-1} p^k$$

$$= (k-2)\, n^{k-1}\, n^{(\varepsilon-1)k}$$

$$= (k-2)\, n^{k\cdot\varepsilon - 1}$$

Da $k\varepsilon - 1 < 0$ ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) = 0$$

Sei nun $n$ so groß, dass $\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) < 1/2$ und $P(\alpha \geq \frac{n}{2k}) < 1/2$ gilt.

voriges Lemma

Dann ex. $H \in \mathcal{G}(n,p)$ mit $\alpha(H) < \frac{n}{2k}$ und weniger als $n/2$ viele Kreise der Länge $\leq k$.

Aus jedem Kreis der Länge $\leq k$ entfernen wir einen Knoten. Der entstandene Graph $G$ hat $\geq \frac{n}{2}$ viele Knoten und enthält keine Kreise der Länge $\leq k$, d.h. $g(G) > k$.

Weiter gilt:

$$\chi(G) \geq \frac{|G|^{\leftarrow \text{Anz. Knoten}}}{\alpha(G)}$$

$$\geq \frac{n/2}{\alpha(H)} > k \,.$$

#

- Hohe Färbungszahlen können einen „globalen" Grund haben (lokal sehen Graphen mit großer Taillenweite aus wie Bäume, welche 2-färbbar sind).