Graphentheorie 9.12.2020

Die „Probabilistische Lupe"

- $cr(G)$ = Kreuzungszahl von G = minimale Anzahl von Kreuzungen, die nötig ist, um G in die Ebene zu zeichnen. („crossing number")

- Satz (Kreuzungslemma): Sei $e > 4n$. Dann

$$cr(G) \geq \frac{e^3}{64n^2}.$$

Beweis: Es gilt

$$cr(G) \geq e - 3n$$

denn entferne aus jeder Kreuzung eine Kante; der entstandene Graph ist planar:

$$e - cr(G) \underbrace{\leq}_{n \geq 3} 3n - 6 < 3n$$

auch für $n < 3$

Sei $0 < p < 1$ eine W'keit.

Wir wählen $H \subseteq G$ zufällig, indem wir jede Knoten mit W'keit p aufnehmen;

Kanten werden automatisch aufgenommen, sobald die beiden Endpunkte in H sind.

n_H = Anzahl der Knoten von H

e_H = Anzahl der Kanten von H

cr_H = Anzahl von Überkreuzungen in H, welche sich aus der (optimalen) Zeichnung von G ergeben. Dann

$$cr_H \geq cr(H) \geq e_H - 3n_H$$

Erwartungswerte

$$\mathbb{E}\, cr_H \geq \mathbb{E}\, e_H - 3\mathbb{E}\, n_H$$

$\mathbb{E}\, n_H = pn$

$\mathbb{E}\, e_H = p^2 e$ (mit W'keit p^2 werden die beiden Endpunkte einer Kante aufgenommen)

$\mathbb{E}\, cr_H = p^4\, cr(G)$ (mit W'keit p^4 werden die 4 Endpunkte von zwei sich schneidenden Kanten gewählt)

$$p^4\, cr(G) \geq p^2 e - 3pn$$

$$\Rightarrow \quad cr(G) \geq \frac{e}{p^2} - \frac{3n}{p^3}$$

Setze $p = \frac{4n}{e} < 1$.

$$cr(G) \geq \frac{1}{64}\left(\frac{4e^3}{n^2} - \frac{3n}{(n/e)^3}\right) = \frac{1}{64}\,\frac{e^3}{n^2}. \qquad \#$$

Extremale Graphentheorie

- Def.: Sei $\mathcal{H}$ eine Familie von Graphen.
$ex_n(\mathcal{H})$ = maximale Anzahl von Kanten, die ein Graph mit n Knoten besitzen kann, ohne einen UG $H \in \mathcal{H}$ zu enthalten. Wir sagen, ein Graph G ist $\mathcal{H}$-extremal, falls $e = ex_n(\mathcal{H})$ und G enthält keinen UG aus $\mathcal{H}$.

- Bsp.: $ex_n(\{C_e\}_{e \geq 3}) = n-1$ („Bäume“)

„Eingabe“ „Ausgabe“

- **Satz** (Mantel 1907): $ex_n(K_3) \le \frac{n^2}{4}$
- **Beweis 1:** Sei G ein dreiecksfreier planarer Graph und $T \subseteq V$ ein minimaler Träger, d.h. $|T| = \tau(G)$. Es gilt

$$e \underbrace{\le}_{\text{Def. Träger}} \sum_{x \in T} d_x \underbrace{\le}_{\text{dreiecksfrei} \Rightarrow \text{Nachbarn von } x \text{ sind unabh.}} \sum_{x \in T} \alpha(G) \overset{|T| = \tau(G)}{=} \tau(G) \cdot \alpha(G)$$

$$\underbrace{\le}_{\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}} \left(\frac{\tau(G) + \alpha(G)}{2}\right)^2 \underbrace{=}_{\tau(G) + \alpha(G) = n} \frac{n^2}{4} \qquad \#$$

Beweis 2: Sei G dreiecksfrei. Jeder Knoten x erhält ein Gewicht $w_x \ge 0$ so, dass $\sum_{x \in V} w_x = 1$.

Wir wollen $W = \sum_{xy \in E} w_x w_y$ maximieren.

Seien x, y zwei Knoten mit $xy \notin E$ und sei v_x das Gewicht der Nachbarn von x, analog v_y.

OE $v_x \ge v_y$. Wegen

$$(w_x + \varepsilon) v_x + (w_y - \varepsilon) v_y \ge w_x v_x + w_y v_y$$

können wir das Gewicht von y zu x verschieben, ohne das Gesamtgewicht W zu verringern.

Wir können annehmen, dass bei zwei nicht verbundenen Knoten xy mindestens einer das Gewicht 0 hat. Es folgt, dass sich das Gewicht auf eine Clique konzentriert. Größte Clique ist eine Kante xy; Gewicht max. bei $w_x = w_y = 1/2$ d.h. $W = \frac{1}{4}$.

Andererseits, wenn jeder Knoten x das Gewicht $w_x = \frac{1}{n}$ erhält, ergibt sich

$$e \frac{1}{n^2} = \sum_{xy \in E} w_x w_y \leq W = \frac{1}{4}. \qquad \#$$