Graphentheorie 16.12.2020

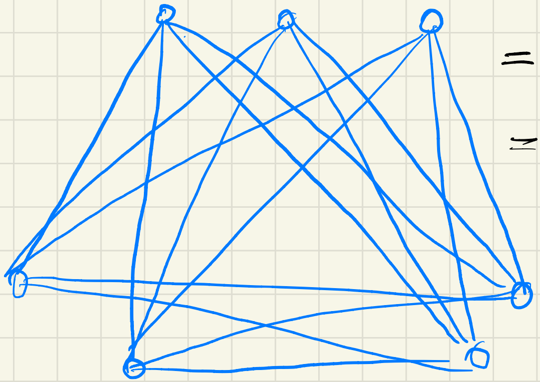
- **Mantel:** $ex_n(K_3) \leq \frac{n^2}{4}$
- $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ ist dreiecksfrei und hat $\frac{n^2}{4}$ Kanten
- $K_{\lceil\frac{n}{2}\rceil,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ (n ungerade)

- **Def.:** $K_{n_1,\dots,n_q} = (V,E)$ mit
  $V = V_1 \dot\cup \cdots \dot\cup V_q$, $|V_i| = n_i$,
  $E = \bigcup_{i \neq j} V_i \times V_j$
  vollständiger q-partiter Graph.
  (multipartiter)

- **Def.:** Turán-Graph $T_n(r) = K_{\lceil\frac{n}{r}\rceil,\dots,\lceil\frac{n}{r}\rceil,\lfloor\frac{n}{r}\rfloor,\dots,\lfloor\frac{n}{r}\rfloor}$ — $T(n,r)$
  wobei es $n \bmod r$ viele Teilmengen V_i mit $\lceil\frac{n}{r}\rceil$ Knoten gibt und $r-(n \bmod r)$ viele mit $\lfloor\frac{n}{r}\rfloor$ Knoten.
  Sei $t_n(r)$ die Anzahl der Kanten in $T_n(r)$.

- **Bsp.:** $T_7(3) = K_{3,2,2}$
  $t_7(3) = 16$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{7^2}{2} - \frac{1(3-1)}{2\cdot 3}$$
$$= 16\tfrac{1}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= 16$$



- Sei $n = pr + q$, $0 \le q < r$. Dann gilt

$$t_n(r) = \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2} - \frac{q(r-q)}{2r}.$$

$$t_n(r) = q\,\frac{(p+1)(n-p-1)}{2} + (r-q)\,\frac{p(n-p)}{2}$$

$$2t_n(r) = \cancel{qpn} - \cancel{qp^2} - qp + qn - qp - q$$
$$+ rpn - rp^2 - \cancel{qpn} + \cancel{qp^2}$$
$$= -qp + qn - qp - q + rp(n-p)$$
$$= -pq + qn - pq - q + (n-q)(n-p)$$
$$= -pq + \cancel{qn} - \cancel{pq} - q + n^2 - pn - \cancel{qn} + \cancel{pq}$$

$p = \frac{n-q}{r}$
$$= -q + n^2 - \frac{n-q}{r}\cdot n - \frac{n-q}{r}\,q$$

$$= -q + n^2 - \frac{n^2}{r} + \cancel{\frac{qn}{r}} - \cancel{\frac{nq}{r}} + \frac{q^2}{r}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{r}\right) n^2 - \frac{qr - q^2}{r}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{r}\right) n^2 - \frac{q(r-q)}{r}$$

- **Satz (Turán 1941):**

G ist K_{r+1}-extremal $\Rightarrow$ $e \leq t_n(r)$, d.h.

$ex_n(K_{r+1}) \leq t_n(r)$.

Beweis: Sei G K_{r+1}-extremal.

Sei $n = pr + q$, $0 \leq q < r$.

Induktion nach n:

$n \leq r$: $G = K_n$ ist K_{r+1}-ex.

$n > r$: Hinzunehmen einer Kante $\rightarrow$ K_{r+1} entsteht

Vorher war schon ein K_r vorhanden.

Sei H dieser K_r in G.

Jeder der verbleibenden Knoten aus G ist

mit höchstens $r-1$ Knoten aus H verbunden.

Die verbleibenden $n-r$ Knoten enthalten auch keinen K_{r+1}. In G:

$$e \overset{IV}{\leq} t_{n-r}(r) + (n-r)(r-1) + \binom{r}{2} = t_n(r)$$

#

- Korollar: $T_n(r)$ ist K_{r+1}-extremal; $ex_n(K_{r+1}) = t_n(r)$.

- Satz: $g(G) \geq 5 \Rightarrow e \leq \frac{1}{2} n \sqrt{n-1}$, d.h. $ex_n(\{C_3, C_4\}) \leq \frac{1}{2} n \sqrt{n-1}$.

Beweis: Sei $g(G) \geq 5$. $x \in V$ fest.
Seien $y_1, \ldots, y_d$ die Nachbarn von x, $d_x = d$.
$y_1, \ldots, y_d$ unabh., da dreiecksfrei
y_i und y_j haben keine gemeinsamen Nachbarn außer x, da C_4-frei. Deshalb:

$$\underbrace{\sum_{xy \in E} (d_y - 1)}_{\text{Nachbarn der Knoten } y_i} + \underbrace{d}_{\text{Knoten } y_i} + \underbrace{1}_{x} \leq n$$

$(\Leftarrow)$ $\sum_{xy \in E} d_y \leq n-1$

Alle x:

$$n(n-1) \geq \sum_{x \in V} \sum_{xy \in E} d_y$$

$$= \sum_{y \in V} d_y^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_y d_y \right)^2 = \frac{1}{n} \cdot (2e)^2.$$

d_y wird d_y-oft gezählt

Cauchy-Schwarz

$\#$

- <u>Def.:</u> Hamiltonpfad, Hamiltonkreis (HC)

- <u>Satz (Dre):</u> $d_x \geq \frac{n}{2}$ $\forall x \in V \implies$ G besitzt Hamiltonkreis.

<u>Beweis:</u> Ang. $d_x \geq \frac{n}{2}$ und G besitzt keinen HC.

OE G besitzt max. Anzahl an Kanten

Sei $xy \notin E$. Maximalität liefert:

$G' = (V, E \cup \{xy\})$ besitzt HC

$$\begin{matrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1} & z_n & x \\ \parallel & & & & \parallel & \\ x & & & & y & \end{matrix}$$

$$X = \{ i \mid x z_{i+1} \in E \} \not\ni n$$

$$Y = \{ i \mid y z_i \in E \} \not\ni n$$

haben jeweils $\geq \frac{n}{2}$ viele Elemente.

Sei $i \in X \cap Y$. Dann ist

$$\underset{\substack{\| \\ x}}{z_1}\, z_2 \cdots z_{i-1}\, \underbrace{z_i, z_n}_{\text{wg. } i \in Y}, z_{n-1}, \ldots, \underbrace{z_{i+1}, x}_{\text{wg. } i \in X}$$

ein HC in G. $\#$