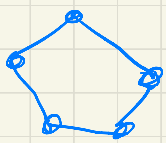
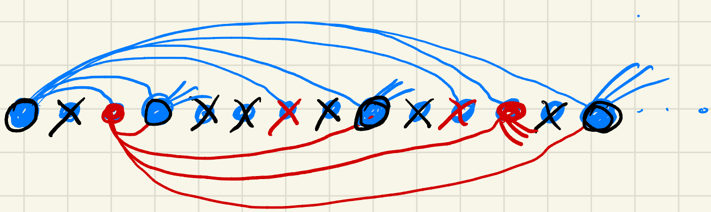
# Ramsey-Theorie

- **Grundidee:** „Wenn ein Objekt groß genug ist, dann ist eine gewisse Eigenschaft unvermeidbar."
- **Bsp.:** Ein Graph mit 6 Knoten besitzt eine Clique oder eine unabh. Menge der Größe 3.
- Gilt bei 5 Knoten noch nicht:



- **Satz** (Ramsey, unendl. Version):
  Ein unendl. Graph enthält eine unendl. Clique oder eine unendl. unabh. Menge.
- **Beweis:** (Skizze)



#

- mehr Farben: ✓
- größere Dimension (nicht nur 2-er Teilmenge): kommt jetzt
- endlich viele Knoten: kommt jetzt.

- <u>Satz (Ramsey 1930):</u>

Sei $k \geq 1$ (Dimension) und $q_i \geq k$ für $1 \leq i \leq s$ (Anzahl Farbe). Es ex. eine minimale Zahl $R_k(q_1, \ldots, q_s)$ mit folgender Eigenschaft: Sei $V$ eine Menge mit $n$ Elementen und $c: \binom{V}{k} \to \{1, \ldots, s\}$ eine Färbung der $k$-elementigen Teilmengen. Wenn $n \geq R_k(q_1, \ldots, q_s)$, dann ex. $1 \leq i \leq s$ und $X \subseteq V$ mit $|X| = q_i$ und $c(Y) = i$ für alle $Y \in \binom{X}{k}$.

<u>Beweis:</u> Sei zunächst $s = 2$.

(a) Für $k = 1$ gilt $R_1(p,q) = p+q-1$

(b) Für $p \geq k$ und $q \geq k$ gilt

$R_k(p,k) = p$ und

$R_k(k,q) = q$.

c) • Induktion nach $(k, p+q)$ mit lex. Ordnung

• Setze $p_1 = R_k(p-1, q)$ und

$q_1 = R_k(p, q-1)$

• $V$ Menge mit $|V| = n \geq 1 + R_{k-1}(p_1, q_1)$

• Sei $c : \binom{V}{k} \to \{1, 2\}$ Färbung

• Sei $x \in V$. $V' := V \setminus \{x\}$

• Definiere $c' : \binom{V'}{k-1} \to \{1, 2\}$

$X \mapsto c(X \cup \{x\})$

• Mit Induktion ex. $\exists$ $A \subseteq V'$ mit

$|A| = p_1 = R_k(p-1, q)$ und $c'\left(\binom{A}{k-1}\right) = \{1\}$

• <u>1. Fall:</u>

A enthält $\{2\}$-gefärbte Teilmenge unter $c$

der Größe $q$ : fertig!

• <u>2. Fall:</u>

A enthält $\{1\}$-gefärbte Teilmenge $A'$ unter $c$

der Größe $p-1$.

$\Rightarrow$ $A' \cup \{x\}$ ist $\{1\}$-gefärbte

Teilmenge der Größe $p$. Fertig.

- Insbes.: $R_k(p,q) \leq R_{k-1}(R_k(p-1,q), R_k(p,q-1)) + 1$

Sei nun $s \geq 3$.

<u>Beh.:</u> $R_k(q_1,\ldots,q_s) \leq \underbrace{R_k(q_1,\ldots,q_{s-2}, R_k(q_{s-1},q_s))}_{|V| \geq}$

Bew. der Beh.:

Sei $c : \binom{V}{k} \to \{1,\ldots,s\}$,

$c'$ färbt wie $c$ aber identifiziert

die Farben $s-1$ und $s$.

<u>1. Fall:</u> Geeignete Teilmenge $A_i$ unter $c'$,

$1 \leq i \leq s-2$: Fertig.

<u>2. Fall:</u> Teilmenge $A_{s-1}$ mit

$|A_{s-1}| = R_k(q_{s-1}, q_s)$ mit

$s-1$ gefärbt unter $c'$

$\Rightarrow$ Geeignete Teilmenge $A_{s-1}' \subseteq A_{s-1}$ oder $A_s' \subseteq A_{s-1}$. #

- **Korollar:** $R_2(p,q) \le \binom{\overset{(p-1)+(q-1)}{p+q-2}}{\underset{q-1}{p-1}}$

**Beweis:** $p=2$: $R_2(2,q) = q = \binom{2+q-2}{1}$

$q=2$: ...

$p,q>2$: $R_2(p,q) \le 1 + R_1\left(R_2(p-1,q),\ R_2(p,q-1)\right)$

$= 1 + R_2(p-1,q) + R_2(p,q-1) - 1$

$\overset{IV}{\le} \binom{p-1+q-2}{p-2} + \binom{p+q-1-2}{p-1}$

$= \binom{p+q-2}{p-1}$ #

- **Korollar:** $R_2(p,p) \le 2^{2p-2}$

[da $\binom{2(p-1)}{p-1} \le 2^{2(p-1)}$ ]

- **Satz:** $R_2(p,p) \ge 2^{p/2}$ für $p \ge 3$.

$6 = R_2(3,3) \le 2^{6-2} = 16$

$\ge 2^{3/2} \ge 2{,}83$